



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

**Harvard College Library**



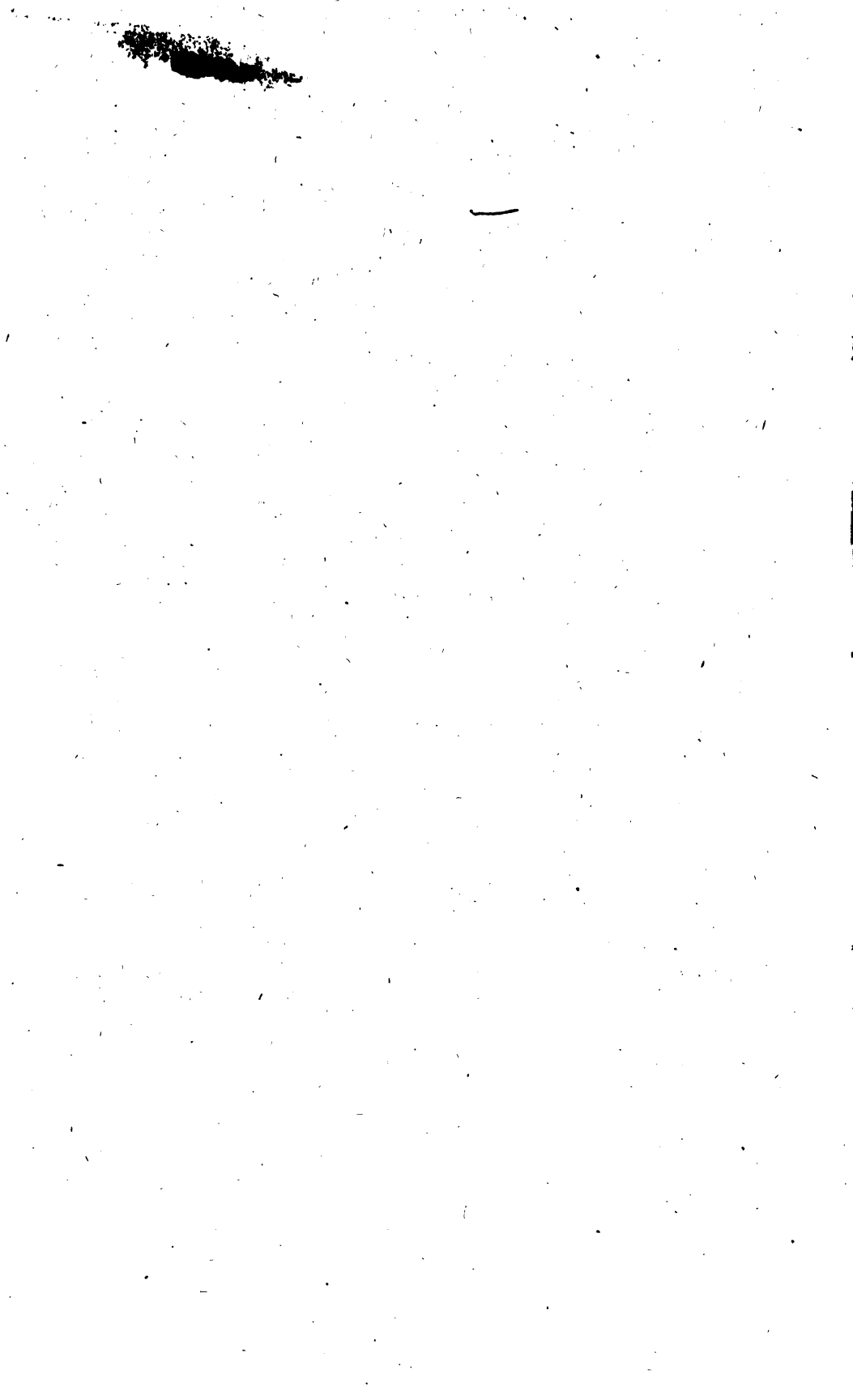
**FROM THE  
GEORGE B. SOHIER  
PRIZE FUND**

THE SURPLUS INCOME OF THIS FUND  
GIVEN BY WALDO HIGGINSON (CLASS  
OF 1833) IN MEMORY OF GEORGE  
BRIMMER SOHIER (CLASS OF 1852)  
IS TO BE EXPENDED FOR BOOKS FOR  
THE LIBRARY

**SCIENCE CENTER LIBRARY**

12.

M. K. Tupper.





# NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE.

---

*Deel XIX.*

---

AMSTERDAM,  
W. VERSLUYS.  
1892.

△  
Sci 900.30



*Schier fund*

*Het „Nieuw Archief voor Wiskunde” wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.”*

*De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.*

LEIDEN, Juli 1891.

DE REDACTEUR,

D. BIERENS DE HAAN,

*Eerste Secretaris van het Genootschap,  
onder de zinspreuk:*

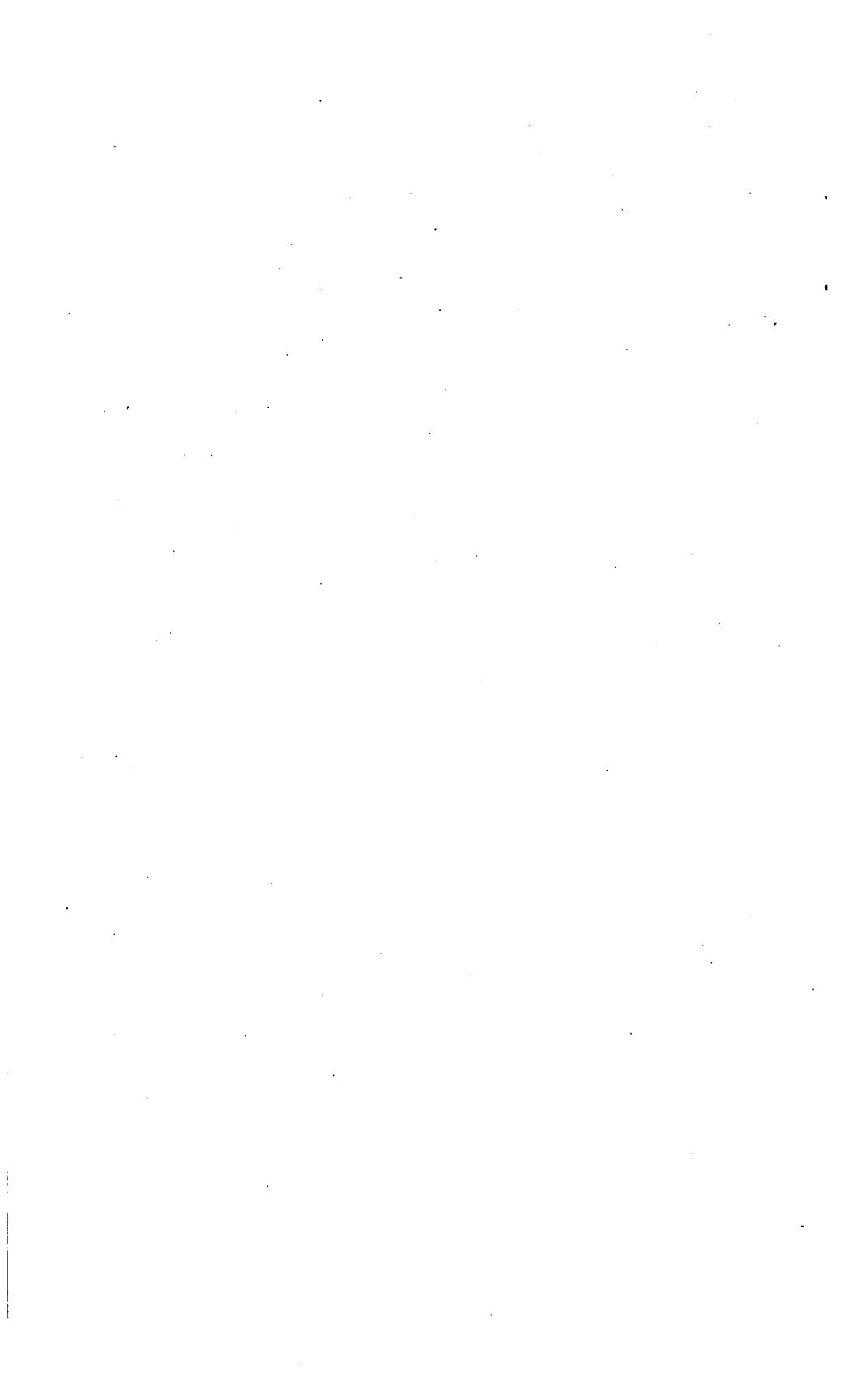
EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

# INHOUD.

	Bladz.
Vraagstuk N°. 7, opgelost door J. C. KLUYVER . . . . .	1.
Logarithmische coördinaten, door A. A. NIJLAND . . . . .	35.
Naschrift. Door A. A. NIJLAND . . . . .	65.
Vraagstuk N°. 12, opgelost door C. KREDIET . . . . .	66.
Over zelf-wederkeerige poolkrommen, door F. J. VAN DEN BERG . .	80.
Nieuw bewijs voor de stelling van Euler, bewezen voor convexe lichamen, door J. M. THIEL . . . . .	98.
Bewijs eener stelling uit de hoogere algebra, door Dr. G. J. D. MOUNIER.	100.
Een rekenkundige eigenschap der binominaal-coëfficiënten, door Dr. H. EKAMA . . . . .	105.
Het schimmel- of klok en hamerspel, door Dr. H. EKAMA . . . . .	107.
Over de meetkundige voorstelling van imaginaire punten in de ruimte, door Dr. P. MOLENBROEK . . . . .	113.
De oplossing van lineaire vector-vergelijkingen in bijzondere gevallen, door Dr. L. VAN ELFRINKHOF . . . . .	132.
Opmerkingen naar aanleiding der verhandelingen over quaternions- matrices, van den heer TH. B. WETTUM, in het Nieuw Archief voor Wiskunde, deel XVII en XVIII, door Dr. L. VAN ELFRINKHOF	143.
Over een vraagstuk, dat in de geodesie van dienst kan zijn, door F. J. VAN DEN BERG . . . . .	151
Volledige berekening van „Het Schimmel- of Klok en Hamerspel, door Dr. G. J. D. MOUNIER. . . . .	188.

## Kleinere mededeelingen.

De oudste rekentafels der wereld, door F. J. VAN DEN BERG . . . .	211.
De constructie van eenige stelsels der hoektransversalen in den vlak- ken driehoek, door P. I. HELWIG J.Az. . . . .	216.





## VRAAGSTUK N°. 7.

OPGELOST DOOR

**J. C. KLUYVER.**

Over het complex der rechte lijnen, gelegen op de oppervlakken van den tweeden graad, gaande door zeven willekeurig gegeven punten.

---

Door iedere overeenkomst, punt voor punt of vlak voor vlak, die er tusschen twee ruimtestelsels bestaat, is een complex bepaald. Namelijk zullen in het eerste geval de verbindingslijnen der toegevoegde punten, in het tweede geval de snijlijnen der toegevoegde vlakken, in het algemeen een drievoudig oneindig stralenstelsel of complex vormen. De complexen, die op deze wijze ontstaan, maken eene afzonderlijke groep uit; daartoe moet ook het hier te beschouwen complex  $K$  worden gerekend, en het is wenschelijk, dit maar onmiddellijk aan te toonen.

Alle oppervlakken van den tweeden graad, door zeven willekeurige punten gebracht, vormen een net en hebben een achtste punt gemeen. Door middel van dit net is er eene involutorische overeenkomst tusschen de punten der ruimte tot stand gekomen; want aan elk punt  $A$  is ten opzichte van alle netoppervlakken een tweede punt  $A'$  harmonisch toegevoegd.

Wanneer wij op de lijn  $AA'$  twee willekeurige punten  $C$  en  $D$  aannemen, dan moet het netoppervlak  $F^2$ , dat door

C en D gaat, de geheele lijn  $AA'$  bevatten, omdat anders A en  $A'$  ten opzichte van  $F^2$  niet harmonisch zouden liggen. Elke verbindingslijn  $AA'$  is derhalve straal van het complex  $K$ . Omgekeerd is een straal  $l$  van  $K$  drager van een puntenpaar  $A, A'$ . Immers als  $l$  op het netoppervlak  $F^2$  ligt, bevat die lijn altijd een paar punten, die harmonisch zijn toegevoegd met betrekking tot twee andere netoppervlakken. Buitendien bezitten die punten blijkbaar dezelfde eigenschap ten opzichte van  $F^2$ , dus zijn het toegevoegde punten van het net. Te verwachten is het derhalve, dat de eigenschappen van het complex  $K$  ten nauwste zullen samenhangen met de theorie van het oppervlakkennet en van de daaruit voortvloeiende involutorische overeenkomst. Wij geven daarom vooraf eene korte opsomming van die eigenschappen van het oppervlakkennet, welke bij het verder onderzoek aanhoudend worden toegepast. Daarna nemen wij als uitgangspunt van onze beschouwingen de constructie van den complexkegel en van de complexkromme, waarbij wij nagaan, onder welke omstandigheden deze figuren buitengewone singulariteiten verkrijgen. Als vanzelf worden dan tegelijkertijd eenige van de eenvoudigste eigenschappen van het singuliere oppervlak  $S$  en van het complexvlak  $V$  opgespoord. Eenige opmerkingen omtrent den bundel van ruimtekrommen  $R^1$  (onderlinge doorsnijdingen der netoppervlakken), in verband met de buigvlakken der complexkegels en de keerpunten der complexkrommen, zullen het onderzoek van het algemeene complex  $K$  besluiten. Eindelijk zullen wij nog even stil staan bij de wijzigingen, die het complex  $K$  door bijzondere ligging der zeven gegeven punten ondergaat. Vergelijking van de uitkomsten, die wij zullen vinden, met die, welke in zoo grooten getale door Voss in zijne beroemde verhandeling over het straalalgemeen complex <sup>1)</sup> zijn afgeleid, zal doen blijken, hoe  $K$  als een bijzonder complex moet worden beschouwd, hetwelk het dualistisch karakter, kenmerk van het straalalgemeen complex, bijna geheel verloren heeft.

1) „Ueber Complexe und Congruenzen“, *Math. Annalen*, Bd. 9, bl. 55. Men vergelijk ook: SCHUBERT, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, § 36, „Singularitäten des allgemeinen Stralencomplexes.“

1. *Het net van oppervlakken van den tweeden graad* <sup>1)</sup>. Alle oppervlakken  $F^2$  door zeven punten  $H_1, H_2, \dots, H_7$  gaande, hebben nog een punt  $H_8$  gemeen; zij heeten gezamenlijk de »basispunten van het net». Iedere verbindingslijn van twee basispunten, die wij »knooplijn» zullen noemen, is volgens eene bekende stelling van HESSE koorde van de ruimtekromme van den derden graad  $Q^3$ , welke door de zes overige basispunten gaat; zoo is de lijn  $H_1 H_2$  koorde van  $Q^3_1$ , en zoo voort. Daarop berust de constructie van het achtste basispunt, als de eerste zeven gegeven zijn <sup>2)</sup>. Door een aangenomen

1) Men vergelijke: REYE, *Geometrie der Lage*, II, blz. 229, STURM, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, blz. 28, SCHRÖTER, *Theorie der Raumkurve 4ter Ordnung 1ster Species*.

2) Theoretisch althans is de constructie van het achtste basispunt, die op de genoemde stelling van HESSE berust, de eenvoudigste. Werkelijk uitvoerbaar evenwel is zij niet. Men kent andere lineaire constructies, die hoewel vrij omslachtig, toch uitvoerbaar zijn. In *Crelle's Journal*, Bd. 99 en 100, vindt men er niet minder dan zes. De eerste van CASPARY berust op de volgende, van HESSE afkomstige, eigenschap der acht »geassocieerde» punten 1, 2, 3, ..., 8: Beschouwt men den scheeven zeshoek 1 2 3 4 5 6, dan kan men een ingeschreven zeshoek van BRIANCHON  $V$  construeeren, welks hoofd diagonalen elkaar in 7 snijden, en waarvan de overstaande hoekpunten op de overstaande zijden van den eersten zeshoek zijn gelegen. Construeert men met behulp van het punt 8 een tweeden dergelijken ingeschreven zeshoek  $V'$ , dan liggen de zijden van  $V$  en  $V'$  op eene hyperboloïde.

Bij eene tweede constructie van SCHRÖTER wordt gebruik gemaakt van de stelling van HESSE, die aangeeft, dat 1, 2, 3, 4 en 5, 6, 7, 8 hoekpunten zijn van twee poolviervlakken van hetzelfde polaire ruimtestelsel.

PICQUER onderzoekt het verband tusschen acht geassocieerde punten, uitgaande van de stelling, dat alle oppervlakken van den tweeden graad, die door vijf gegeven punten gaan, door een willekeurig vlak worden gesneden volgens kegelsneden, die eene vaste kegelsnede in het vlak harmonisch omschreven zijn.

STURM projecteert uit 1 en 2 vooreerst de punten 3, 4, 5, 6, 7 op een willekeurig vlak. De twee vijftallen van projecties komen met elkaar overeen, en in die overeenkomst hebben de beide projecties van 8 eene eigenaardige beteekenis, die veroorlooft ze te construeeren.

ZEUTHEN geeft eene constructie, berustende op de volgende eigenschap: Indien men de punten 2, 3, 5, 6, 7 en de lijnen 12 en 34 als gegeven beschouwt, gaat het vlak 148 door een vast punt van het vlak 567.

REYE construeert ten laatste het punt 8 door er van gebruik te maken, dat twee willekeurige punten steeds met acht geassocieerde punten op een oppervlak van den tweeden graad liggen.

Ten slotte vindt men in de *Acta Mathematica*, 12: 3 en 4, eene verhandeling van DOBRINER, waarin gewezen wordt op de analogie tusschen de eigenschappen der acht basispunten en die van zes punten op eene kegelsnede. Ter zelfder plaatse

punt  $A$  gaat een bundel van oppervlakken  $F^2$ , die elkaar doorsnijden volgens eene ruimtekromme  $R^4$ , »basiskromme van het net»; de lijn  $AA'$  raakt in  $A$  aan  $R^4$ .

Aangaande de involutorische overeenkomst tusschen  $A$  en  $A'$  merken wij op, dat aan alle punten  $A$  van een vlak  $e$  de punten  $A'$  van een oppervlak, aan alle punten  $A$  van eene rechte lijn  $g$  de punten  $A'$  van eene ruimtekromme van den derden graad zijn toegevoegd.

Het eerste heet het »pooloppervlak» van  $e$ , de tweede de »poolkromme» van  $g$ . Er zijn evenwel punten  $A$  te vinden, waarvoor  $A'$  onbepaald wordt. In het net komen kegels voor, en voor een kegeltop  $p$  is het poolvlak ten opzichte van den kegel onbepaald. Met iederen kegeltop komen daarom alle punten van eene lijn  $g$  overeen, de »poollijn» van  $p$  genaamd; het vlak  $e$  door  $p$  en  $g$  zal voortaan het »nulvlak» van  $p$  heeten. Alle kegeltoppen  $p$  liggen op de »kernkromme»  $C^6$  van het net, eene ruimtekromme van den zesden graad, van den rang 16 en het geslacht 3. De poollijnen  $g$  zijn drievoudige koorden van  $C^6$ , zoodat aan iederen kegeltop  $p$  drie andere kegeltoppen  $p'$  zijn toegevoegd. De kernkromme gaat niet door de basispunten van het net; wel bevat zij die punten van eene knooplijn, waar deze de bijbehorende kromme  $Q^3$  ontmoet. Wat de basispunten zelve aangaat, zij vallen met de hun toegevoegde punten samen; iedere lijn door het basispunt is als de verbindingslijn te beschouwen. Dit zijn in hoofdzaak de eigenschappen, die wij voor het volgende onderzoek noodig hebben.

2. *De complexkegel van een gegeven punt*  $P$ . Volgens art. 1 gaat door  $P$  ééne basiskromme  $R^4$  van het net; iedere koorde  $PB$  dier kromme snijdt blijkbaar het net in involutie en draagt derhalve een paar punten  $A, A'$ . Overigens is het ook duidelijk, dat door  $R^4$  en hare koorde  $PB$  altijd een net-oppervlak kan worden aangebracht. Alle complexstralen door  $P$  vormen derhalve een kegel van den derden graad en de

---

geeft ZEUTHEN een paar nieuwe eigenschappen, waarin de scheeve achthoeken, die men met de basispunten kan vormen, worden beschouwd.

Men vergelijkte verder het reeds aangehaalde geschrift van SCHRÖTER, waar op blz. 4 de literatuur over dit onderwerp is aangegeven.

zesde klasse, waaruit blijkt, dat wij met een complex  $K$  van den derden graad te doen hebben.

Onder de complexstralen door  $P$  zijn er, die wij in het oog moeten houden. Omdat iedere  $R^4$  door de basispunten  $H_1, H_2, \dots, H_8$  gaat, liggen op iederen complexkegel de stralen  $PH_1, PH_2, \dots, PH_8$ . De basispunten van het net zijn dus, zooals trouwens reeds dadelijk uit art. 1 viel af te leiden, enkelvoudige »hoofdpunten» van het complex. Van iederen complexkegel zijn derhalve te voren reeds de acht hoofdpuntstralen bekend. Een andere bijzondere straal is die, welke  $P$  met het toegevoegde punt  $P'$  verbindt; zooals wij zagen, is  $PP'$  de raaklijn in  $P$  aan  $R^4$ . Vervolgens komen op den complexkegel achttien stralen voor, die de kernkromme snijden. Door  $P$  gaan slechts vier netkegels, dus ook maar vier netkegelstralen; de veertien overige liggen in de nulvlakken der bijbehorende kegeltoppen; wij zullen ze »nulpuntstralen» noemen. Terloops volgt, dat de nulvlakken een ontwikkelbaar oppervlak  $U_{14}$  van de veertiende klasse vormen, dat, zooals later blijken zal, voor het complex  $K$  van bijzondere beteekenis is. Ten laatste trekken de negen buigstralen van den complexkegel de aandacht. Wanneer de koorde  $PB$  van  $R^4$  een buigstraal van den complexkegel is, snijdt het osculatievlak van  $R^4$  in  $B$  die kromme opnieuw in  $P$ ; dit punt is dus het tangentiaalpunt van  $B$ . In het vervolg noemen wij de lijn  $BP$  de »osculatiekoorde» van  $B$ . Wat de constructie van den complexkegel betreft, zij kan lineair als volgt geschieden. Met behulp van de acht basispunten van het net kan men vooreerst de poolvlakken van  $P$  ten opzichte van drie netoppervlakken en daarmede het toegevoegde punt  $P'$  bepalen.

Behalve de acht hoofdpuntstralen is dan een negende straal  $PP'$  van den complexkegel  $P$  bekend. Met behulp van die gegevens kan de kegel zelf verder door lineaire constructie worden gevonden <sup>1)</sup>.

### 3. De toegevoegde punten $A, A'$ gelegen op de complexstralen

1) CREMONA-CURTZE, *Ebene Curven*, art. 66, of SCHRÖTER, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung*, blz. 72.

door P. Het is niet zonder belang te weten, hoe de toegevoegde punten A, A' op den complexkegel P zijn gerangschikt. Dat die punten eene ruimtekromme  $M^7$  van den zevenden graad zullen vormen, is te verwachten, als men bedenkt, dat een willekeurig vlak door P drie paar punten A, A' bevat, terwijl P, behoorende tot het paar P, P', ook in het vlak ligt. Analytisch is dit gemakkelijk te bevestigen. Laten

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0.$$

drie netoppervlakken voorstellen, die het net volkomen bepalen. Nemen wij aan, dat P de coördinaten  $x_i$  heeft, dan zal, als A met de coördinaten  $y_i$  een punt van de meetkundige plaats is, het punt A' de coördinaten  $x_i + \lambda y_i$  bezitten. Wij hebben derhalve de voorwaarden

$$\begin{aligned} a_x a_y + \lambda a_y^2 &= 0, \\ b_x b_y + \lambda b_y^2 &= 0, \\ c_x c_y + \lambda c_y^2 &= 0; \end{aligned}$$

die uitdrukken, dat de punten A en A' harmonisch zijn toegevoegd ten opzichte der drie beschouwde netoppervlakken.

Eliminatie van  $\lambda$  levert voor de meetkundige plaats van A

$$\frac{a_x a_y}{a_y^2} = \frac{b_x b_y}{b_y^2} = \frac{c_x c_y}{c_y^2}.$$

Door deze vergelijkingen, waarin men  $y_i$  als loopende coördinaten beschouwt, is inderdaad eene ruimtekromme  $M^7$  van den zevenden graad bepaald <sup>1)</sup>. Zij vormt met de kegel-snede

$$\begin{cases} a_x a_y = 0, \\ a_y^2 = 0, \end{cases}$$

de volledige doorsnede van de beide oppervlakken van den derden graad

$$\begin{aligned} a_x a_y b_y^2 - b_x b_y a_y^2 &= 0, \\ a_x a_y c_y^2 - c_x c_y a_y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Volgens de uitkomsten van STURM <sup>2)</sup> is zij dus van den rang 22, en heeft zij tien schijnbare dubbelpunten. Zij gaat door P, omdat de substitutie  $y_i = x_i$  voldoet. Nemen wij aan, dat

1) Men vergelijke: Dr. P. II. SCHOUTE, „Over eene bijzondere ruimtekromme van den zevenden graad”, *Nieuw Archief*, deel X, blz. 54.

2) STURM, t. a. p., blz. 222.

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0$$

is, dan wordt de raaklijn in P bepaald door de vergelijkingen

$$\begin{cases} a_x a_y = 0, \\ b_x b_y = 0. \end{cases}$$

De kromme  $M'$  raakt derhalve in P de basiskromme  $R^4$  en den straal  $PP'$ . De complexkegel  $P$  wordt voorgesteld door

$$a_x a_y b_y^2 - b_x b_y a_y^2 = 0.$$

Behalve dien kegel komt in den bundel van oppervlakken van den derden graad, door de beide zoeven aangewezen oppervlakken bepaald, geen tweede kegel voor. Voor  $M'$  is dus P het eenige driekegelpunt. Er zijn evenwel bijzondere gevallen, waarbij  $M'$  drie tot vijf driekegelpunten kan verkrijgen <sup>1)</sup>. Intusschen valt uit de vergelijkingen nog af te leiden, dat  $M'$  in de hoofdpunten de hoofdpuntstralen aanraakt, en dat zij voorts ieder netoppervlak  $F^2$  daar snijdt, waar de complexstraal  $F^2$  raakt. Verder toont men gemakkelijk aan, dat zij de kernkromme veertien malen ontmoet (art. 2) en dus ook de poollijnen van die snijpunten treft. Neemt men eindelijk op iederen complexstraal het aan P ten opzichte van A, A' harmonisch toegevoegde punt, dan vindt men noodzakelijk de doorgaande basiskromme  $R^4$  terug.

4. *De complexkromme van een gegeven vlak  $\pi$ .* Van de complexkromme in een willekeurig vlak verkrijgt men eene voorstelling, als men in het oog houdt, dat iedere complexstraal de netoppervlakken  $F^2$  in involutie snijdt. In het vlak  $\pi$  nu bepalen alle oppervlakken  $F^2$  een kegelsnedennet. De toegevoegde punten A, A' doorloopen de kromme van HESSE, de verbindingslijnen AA' omhullen de kromme van CAYLEY. De complexkromme is derhalve van de derde klasse en den zesden graad; zij bezit negen keerpunten. Zoo men wil, kan men blijkbaar zeggen, dat de complexstralen in  $\pi$  de beschrijvende lijnen zijn van die oppervlakken  $F^2$ , welke het vlak  $\pi$  op de kromme van HESSE raken, of anders, dat de complexkromme omhuld wordt door de in  $\pi$  gelegen koorden

---

Dr. P. H. SCHOOTE, „Sur un complexe du troisième ordre” (Compte rendu de l'Association française, Congrès de Toulouse, 1887).

en raaklijnen der basiskrommen  $R^4$ . Het is deze laatste opvatting, die aan de keerraaklijnen eene bijzondere beteekenis geeft. Zooals men gemakkelijk aantoonst, zijn er negen basiskrommen  $R^4$ , die  $\pi$  in eenig punt B osculeeren en in een ander punt P snijden. Het punt B zal een raakpunt van de krommen van HESSE en CAYLEY, de raaklijn in B aan  $R^4$  de gemeenschappelijke raaklijn dezer krommen zijn. Het snijpunt P evenwel is een keerpunt van de kromme van CAYLEY, en de lijn PB is de keerraaklijn <sup>1)</sup>. Die negen keerraaklijnen zijn derhalve osculatiekoorden van de basiskrommen, die  $\pi$  osculeeren. Andere complexstralen van bijzonderen aard treft men in het vlak  $\pi$  niet aan. Men zou nog kunnen opmerken, dat  $\pi$  de kernkromme in zes kegeltoppen snijdt, zoodat dit vlak zes paar netkegelstralen en zes nulpuntstralen zal bevatten. De constructie van de complexkromme levert meer bezwaar dan die van den complexkegel. Daar van de complexkromme van te voren geen enkel punt of geen enkele raaklijn is aan te wijzen, is de constructie van de oplossing van minstens ééne derdemachtsvergelijking afhankelijk. Men kan beginnen met van een willekeurig punt P van  $\pi$  den complexkegel te construeeren; is eenmaal de doorsnede van dien kegel met  $\pi$  gevonden, dan kunnen de overige raaklijnen der complexkromme achtereenvolgens als ontaarde krommen van het in  $\pi$  gelegen kegelsnedennet paarsgewijze door kwadratische constructies worden opgespoord.

5. *Dualistische betrekkingen tusschen den complexkegel en de complexkromme.* Eer wij er toe overgaan, om de verschillende singulariteiten, die zich bij complexkegels en complexkrommen kunnen voordoen, nader te onderzoeken, is het wellicht dienstig aan de betrekkingen te herinneren, welke er tusschen die figuren bestaan, wanneer de top P van den kegel in het vlak  $\pi$  ligt. Het beste inzicht verkrijgt men door den stralenbundel  $P(\pi)$  te beschouwen; daarin komen steeds drie complexstralen voor, waarvan er twee of drie kunnen samenvallen. Vallen twee samen, dan raakt  $\pi$  aan den complex-

---

1) Omtrent het verband tusschen de krommen van HESSE en CAYLEY vergelijke men: SCHRÖTER, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung*, § 28 en 29.



kegel van  $P$ , en ligt  $P$  tegelijk op de complexkromme van  $\pi$ . Vallen drie stralen samen, dan is  $\pi$  buigvlak van den complexkegel van  $P$ , tegelijk  $P$  keerpunt van de complexkromme van  $\pi$ . Op een gegeven complexstraal  $l$ , zoo bewijst Voss <sup>1)</sup>, zijn de punten  $P$  projectivisch toegevoegd aan de vlakken  $\pi$  door  $l$ , zoodanig, dat steeds  $P$  top,  $\pi$  raakvlak van een complexkegel of wel  $\pi$  vlak en  $P$  punt van eene complexkromme zijn. Is een complexstraal  $l$  singulier, dat is dubbelribbe op den complexkegel van een harer punten  $P$ , dan is zij tegelijk dubbelraaklijn van de complexkromme in een harer vlakken  $\pi$ ;  $P$  is raakpunt van  $l$  op alle overige complexkrommen, wier vlakken door  $l$  gaan,  $\pi$  is raakvlak langs  $l$  van alle overige complexkegels, wier toppen op  $l$  liggen.  $P$  heet het singuliere punt,  $\pi$  het singuliere vlak van den straal. Het singuliere oppervlak  $S$  is tegelijk meetkundige plaats van de singuliere punten en omhullende van de singuliere vlakken. Elk zoodanig vlak  $\pi$  heeft het bijbehorende punt  $P$  van den straal tot raakpunt met  $S^2$ ).

6. *Complexkegels met dubbelribbe*. De complexkegel, zooals wij zagen, van den derden graad kan als eerste bijzonderheid eene dubbelribbe vertoonen. Bedenken wij, dat de complexkegel van  $P$  volledig bepaald is door de basiskromme  $R^4$ , die door  $P$  gaat, dan is het onmiddellijk in te zien, dat de dubbelribbe voorkomt, wanneer  $P$  gelegen is op eene  $R^4$  met dubbelpunt. En eene basiskromme met een enig dubbelpunt ontstaat, wanneer de oppervlakken van den bundel, die alle door  $P$  gaan, elkaar aanraken, of wat op hetzelfde neerkomt, wanneer de toppen van twee der vier bundelkegelvlakken op de basiskromme samenvallen. Een dubbelpunt van  $R^4$  ligt derhalve noodzakelijk op de kernkromme  $C^6$ . Het is duidelijk, hoe men zulke basiskrommen op een gegeven netoppervlak  $F^2$  kan vinden. Dit oppervlak namelijk snijdt  $C^6$  in twaalf kegeltoppen  $p$ , en elk dier kegels  $p$  doorsnijdt  $F^2$  volgens eene  $R^4$  met dubbelpunt in  $p$ . Voor een punt  $P$  op zulk eene  $R^4$  is  $Pp$  eene dubbelribbe,

1) Voss, t. a. p., blz. 63.

2) Voss, t. a. p., blz. 79.

voor ieder ander punt van deze lijn is  $Pp$  enkelvoudige straal op den complexkegel. Zooals men ziet, hebben de netkegelstralen de eigenschap, voor één hunner punten dubbelribbe te worden; zij vormen de congruentie  $(4, 12)$  der singuliere stralen van het complex  $K^1$ ). De punten  $P$  zijn singuliere punten; zij hebben het singuliere oppervlak  $S$  tot meetkundige plaats. Zonder daaromtrent voorloopig in nadere bijzonderheden te treden, kunnen wij toch reeds hier den graad daarvan aangeven. En wel is  $S$  van den vier en twintigsten graad, omdat het oppervlak  $F^2$  met  $S$  twaalf krommen  $R^4$  gemeen heeft. Intusschen zijn er ook punten  $P$ , waarvoor de complexkegel eene dubbelribbe bezit, die dit karakter voor elk harer punten behoudt. Beschouwen wij namelijk een punt  $P$ , gelegen op de knooplijn  $H_1 H_2$ . De basiskromme  $R^4$  door  $P$  is uiteengevallen in de knooplijn zelve en de kromme  $Q^3_{11}$ . De knooplijn  $H_1 H_2$ , beschrijvende lijn van alle netoppervlakken van een bundel, is derhalve dubbelribbe voor al hare punten  $P$ . Snijdt die knooplijn  $H_1 H_2$  de kromme  $Q^3_{11}$  in  $A$  en  $B$ , dan telt het stelsel dezer lijnen voor twee basiskrommen  $R^4$  met dubbelpunt. Immers kan men dit dubbelpunt evengoed in  $A$  als in  $B$  aannemen. Daaruit volgt, dat zoowel de knooplijnen als de krommen  $Q^3$  dubbellijnen op het singuliere oppervlak zijn, eene eigenschap, die wij, voor zoover het de kromme  $Q^3$  betreft, in art. 8 bevestigd zullen zien.

7. *Complexkegels met keerribbe*. Voor sommige der in het vorige art. besproken complexkegels zal de dubbelribbe in eene keerribbe overgaan. Dat zal blijkbaar het geval zijn, als  $P$  ligt op eene basiskromme  $R^4$  met keerpunt. Om zulke basiskrommen op te sporen, is het noodig de doorsnede van de kernkromme  $C^6$  met het nulvlak  $e$  van den kegeltop  $p$  wat nader in het oog te vatten. In art. 1 werd vermeld, dat het nulvlak  $e$  van  $p$  eene drievoudige koorde van  $C^6$ , te weten de poollijn  $g$  met drie toegevoegde kegeltoppen  $p'$ , bevat. Het nulvlak snijdt verder  $C^6$  nog in twee andere kegeltoppen  $q$  en  $r$ . De kegels  $p'$  snijden  $e$ , daarentegen

---

1) Voor het straalalgemeen complex van den derden graad is dit eene congruentie,  $(12, 12)$ . (Voss, t. a. p., blz. 69).

moeten de kegels  $q$  en  $r$  dit vlak raken, omdat het poolvlak van  $p$  ten opzichte van beide door de lijn  $g$  moet gaan. De netkegel  $p$  zelf wordt door  $e$  volgens twee lijnen  $u$  en  $v$  gesneden; het zijn de dubbelpuntsraaklijnen in  $p$  aan de door  $p$  gaande basiskromme  $R^4$ . Alle oppervlakken door  $R^4$  vormen een bundel en raken in  $p$  aan  $e$ . In den bundel liggen vier netkegels, waarvan er twee in den kegel  $p$  samenvallen,  $q$  en  $r$  moeten de beide andere zijn. Wanneer zal nu  $R^4$  een keerpunt verkrijgen? Dat zal geschieden, als  $u$  en  $v$  samenvallen op  $pq$ ; in den bundel valt dan een derde kegel-top  $q$  met  $p$  samen, omdat alle bundeloppervlakken in  $p$  dan eene stationaire aanraking hebben. De keerpunten van basiskrommen  $R^4$  zijn derhalve die punten  $p$  van  $C^8$ , waar het nulvlak  $e$  de kernkromme raakt. Het aantal van die keerpunten kan langs zeer verschillende wegen worden gevonden. De rechtstreeksche toepassing van de coïncidentie-formule van SCHUBERT <sup>1)</sup>

$$\varepsilon = e + h - p,$$

is daartoe voldoende. Wij noemen namelijk  $h$  de raaklijn in  $p$  aan  $C^8$  en vragen naar het aantal malen  $\varepsilon$ , dat  $h$  in  $e$  valt.

De symbolen  $e, p, h$  beteekenen in volgorde, dat het nulvlak door een gegeven punt gaat, dat  $h$  eene gegeven lijn snijdt, en dat  $p$  in een gegeven vlak ligt.

In de formule hebben wij te substitueeren

$$e = 14, p = 6, h = 16,$$

want het ontwikkelbaar oppervlak  $U_{14}$  (art. 2) is van de klasse veertien, de kernkromme is van den graad zes en van den rang zestien.

Uit dit alles volgt dan  $\varepsilon = 24$ , en wij besluiten tot de aanwezigheid van 24 basiskrommen  $R^4$  met keerpunt.

Wij willen die uitkomst nog anders afleiden en daartoe vooraf vragen naar den graad van het regelvlak, gevormd door de dubbelpuntsraaklijnen der basiskrommen  $R^4$ , anders gezegd de snijlijnen van netkegel en nulvlak van  $p$ .

Op eene willekeurige lijn vormen de snijpunten met net-

---

1) SCHUBERT, t. a. p., blz. 83.

kegel en nulvlak eene overeenkomst (4, 28), die 32 coïncidenties telt. Het bedoelde regelvlak is dus van den graad 32. Heeten nu de dubbelpuntsraaklijnen  $h$  en  $h'$ , dan kunnen wij aanwenden de coïncidentieformule <sup>1)</sup>

$$\varepsilon = h + h' - p - e.$$

De voorwaarden  $e$ ,  $p$ ,  $h$ ,  $h'$  hebben de beteekenis, overeenkomende met de zooeven vermelde,  $\varepsilon$  is de voorwaarde voor het samenvallen van  $h$  en  $h'$ . In verband met het voorafgaande is  $h = h' = 32$  en verder

$$p = 12, e = 28,$$

omdat de dubbelpuntsraaklijnen telkens door de voorwaarde  $p$  of  $e$  bepaald,  $h$  en  $h'$  of ook  $h'$  en  $h$  kunnen heeten.

Uit de formule volgt weer  $\varepsilon = 24$ ; de vier en twintig basiskrommen  $R^4$  met keerpunt zijn opnieuw gevonden. De meetkundige plaats der toppen van complexkegels met keerribbe wordt door deze 24 krommen gevormd. Die meetkundige plaats is tegelijk de keerpuntslijn van het singuliere oppervlak <sup>2)</sup>. Het ontwikkelbaar oppervlak, gevormd door de keerraakvlakken der complexkegels is voor het zeer bijzondere complex  $K$  in vier en twintig vlakkenbundels uiteengevallen.

8. *Complexkegels met twee dubbelribben.* Zoodra een complexkegel twee dubbelribben bezit, wordt hij gesplitst in een kegel van den tweeden graad en in een stralenbundel. Een top van zulk een kegel moet of op eene basiskromme  $R^4$  met twee dubbelpunten liggen, of wel het eenige dubbelpunt eener basiskromme zijn. De punten  $p$  der kernkromme verkeeren in het laatste geval. Werkelijk splitst zich daar de complexkegel in den netkegel en het nulvlak <sup>3)</sup>. Intusschen zijn er basiskrommen met twee dubbelpunten; het zijn ontaardingen, bestaande uit eene knooplijn en de daaraan toegevoegde kromme  $Q^3$ . Neemt men  $P$  op de kromme  $Q^3_{1,1}$ , dan bestaat de complexkegel uit een kegel van den tweeden graad (geen netkegel), waardoor  $Q^3_{1,1}$  uit  $P$  wordt geprojecteerd en uit

1) SCHUBERT, t. a. p., blz. 60.

2) VOSS, t. a. p., blz. 144.

3) De in art. 3 besproken kromme  $M'$  valt uiteen, de poollijn  $g$  scheidt zich af; er blijft eene  $M^e$  over met dubbelpunt in  $p$ , rakende aan de beide takken van  $R^4$  en met de lijn  $g$  tot koorde.

den stralenbundel  $P$ , gelegen in het vlak, dat  $P$  met de knooplijn  $H_1 H_2$  bepaalt. Snijdt die knooplijn  $Q_1^3$  in  $A$  en  $B$ , dan zijn  $PA$  en  $PB$  de singuliere stralen, en dat zijn weer netkegelstralen, omdat zooals in art. 1 werd vermeld, de kernkromme door  $A$  en  $B$  gaat. Komt  $P$  langs  $Q_1^3$  in  $A$ , dan is de complexkegel samengesteld uit netkegel en nulvlak, welk laatste vlak nu door de knooplijn gaat en in  $A$  door  $Q_1^3$ , wordt geraakt.

Door iedere knooplijn, zoo volgt terloops, gaan twee nulvlakken; het zijn er te zamen dus zes en vijftig, waarvan er veertien door elk hoofdpunt gaan.

Uit dit alles besluiten wij verder, dat zoowel  $C^6$  als de acht en twintig krommen  $Q^3$  tot het stelsel der dubbelkrommen op  $S$  zullen behooren.

Zoo men wil, kan men ook zeggen: De toppen der geheel in het complex  $K$  gelegen stralenbundels vormen eene ruimtekromme van den graad  $6 + 3 \times 28 = 90$ . Dat is eene uitkomst, die volgens Voss <sup>1)</sup> ook voor het straalalgemeen complex van den derden graad geldig is.

9. *Laatste ontaarding van den complexkegel.* De complexkegel kan bij het algemeen complex van den derden graad in drie afzonderlijke stralenbundels uiteenvallen, maar dit kan in het complex  $K$  niet geschieden, omdat in geen enkel punt van  $C^6$  de netkegel kan ontaarden, evenmin als dit het geval kan zijn met een complexkegel, wiens top op eene der krommen  $Q^3$  is gelegen. Daartoe zou bijzondere stand der basispunten van het net een vereischte zijn.

Wel daarentegen kan de complexkegel geheel verdwijnen, en dit geschiedt in de 8 hoofdpunten, waar iedere straal tot  $K$  behoort.

En daarmede zijn alle bijzonderheden, die men bij de complexkegels kan aantreffen, besproken; het is thans zaak de complexkromme in dit opzicht aan een onderzoek te onderwerpen.

10. *Complexkrommen met dubbelraaklijn.* Bij de beschouwing

---

1) Voss, t. a. p., blz. 158. Men vergelijke ook de eigenaardige wijze, waarop SCHUBERT (t. a. p., blz. 272) dit graadgetal afleidt.

der complexkegels is de congruentie der singuliere stralen reeds gevonden. De in art. 5 opgenoemde eigenschappen in aanmerking nemende, kost het dus weinig moeite, om de complexkrommen met dubbelraaklijn te vinden. En wel is het duidelijk, dat het singuliere vlak van een gegeven netkegelstraal  $l$  het raakvlak van den bijbehorenden netkegel  $p$  zal zijn. Immers in dat vlak vindt men een kegelsneden-net, waarin eene dubbellijn  $l$  voorkomt, en de kromme van CAYLEY zal die lijn  $l$  tot dubbelraaklijn hebben. De raakpunten op  $l$  zijn beide toegevoegde punten  $A, A'$  van het oppervlakkennet. Van alle andere dergelijke puntenparen in het vlak ligt  $A$  op  $l$  en  $A'$  op eene kegelsnee. Derhalve ieder raakvlak van een netkegel  $p$  is raakvlak van het singuliere oppervlak  $S$ , en wel komt het raakpunt  $P$  op de basiskromme  $R^4$ , die in  $p$  een dubbelpunt heeft. En daarmede is de klasse 8 van het oppervlak  $S$  bekend. Immers door zeven willekeurige punten gaan acht kegels van den tweeden graad, die eene gegeven lijn raken <sup>1)</sup>. Het is wel overbodig, weer in herinnering te brengen, dat voor elk ander vlak door den singulieren straal  $l$  deze lijn enkelvoudige raaklijn der complexkromme wordt, waarbij dan steeds het raakpunt in het singuliere punt  $P$  valt.

Het is intusschen eene belangrijke eigenschap van het complex  $K$ , dat voor geen enkel singulier vlak de dubbelraaklijn eene buigraaklijn der complexkromme kan worden, terwijl er daarentegen wel eene meetkundige plaats is van singuliere punten, waarvoor de dubbelribbe keerribbe van den complexkegel wordt. En de juistheid dezer opmerking blijkt, door in aanmerking te nemen, dat de kromme van CAYLEY van een kegelsneden-net, hoe bijzonder ook van aard, nooit een buigpunt kan vertoonen. Mochten de beide raakpunten op de dubbelraaklijn samenvallen, dan valt altijd de kromme van CAYLEY uiteen. Dit is een verschijnsel, hetwelk wij zoo aanstands zullen aantreffen.

11. *Complexkrommen met twee dubbelraaklijnen.* Uit het vorige artikel volgt vanzelf, dat wij complexkrommen met

---

1) SCHUBERT, t. a. p., blz. 104. ( $\chi \nu \mu' = 8$ ).

twee dubbelraaklijnen zullen ontmoeten in die singuliere vlakken, welke twee netkegels aanraken. Van het snijpunt der aanrakingsribben is het toegevoegde punt onbepaald; dit punt heeft in het gemeenschappelijk raakvlak eene poollijn, en daarom alleen zijn de nulvlakken dubbelraakvlakken van het oppervlak  $S$ . Dit laatste bezit derhalve een dubbelaanrakend ontwikkelbaar oppervlak  $U_{14}$  van de veertiende klasse <sup>1)</sup>. Het is de meetkundige plaats der vlakken van de geheel in het complex  $K$  gelegen stralenbundels <sup>2)</sup>. Behouden wij de schrijfwijze van art. 7, dan toonen wij gemakkelijk aan, dat de complexkromme in het nulvlak  $e$  van den kegeltop  $p$  is uiteengevallen, en bestaat uit den stralenbundel  $p$  benevens eene kegelsnee, die op de poollijn  $g$  de netkegelstralen  $pq$  en  $pr$  aanraakt. Laatstgenoemde lijnen zijn dus inderdaad de beide dubbelraaklijnen der ontaarding; zij vormen te zamen met de poollijn  $g$  de meetkundige plaats der toegevoegde punten  $A, A'$ .

Maar behalve de vlakken van  $U_{14}$  is er nog eene tweevoudige oneindige hoeveelheid van andere vlakken, wier complexkrommen twee dubbelraaklijnen bezitten; dat zijn de vlakken, die door een hoofdpunt gaan. Men overtuigt zich, dat die kromme voor zulk een vlak door het hoofdpunt  $H_1$  bestaat uit den stralenbundel  $H_1$  benevens eene kegelsnee. Meetkundige plaats der toegevoegde punten  $A, A'$  is eene kromme van den derden graad met  $H_1$  tot dubbelpunt. De dubbelpuntsraaklijnen, gelegen op het netoppervlak, dat in  $H_1$  het beschouwde vlak raakt, zijn tegelijk de dubbelraaklijnen der complexkromme, zonder dat men ze als singuliere stralen van  $K$  heeft te beschouwen.

In vlakken door een hoofdpunt kan het gebeuren, dat de beide dubbelraaklijnen samenvallen, en dat het hoofdpunt op de kegelsnee komt. Dat zal plaats vinden, als het vlak in  $Q$  een netkegel raakt en daardoor een singulier vlak wordt.

Voor het verdere onderzoek van  $S$  is het wenschelijk, de

1) Men vergelijke art. 2.

2) Voor het straalalgemeen complex is dit een oppervlak van de klasse 90 (Voss, t. a. p., blz. 158).

meetkundige plaats van die vlakken te bepalen. Wij verbinden het hoofdpunt  $H$  met een willekeurig punt  $P$ , merken op, dat alle netoppervlakken, die in  $H$  de lijn  $HP$  raken, een bundel vormen, waarin vier netkegels voorkomen. Door  $P$  gaan derhalve vier vlakken, welke in  $H$  een netkegel raken; met andere woorden: de raakvlakken in een hoofdpunt aan het singuliere oppervlak  $S$  omhullen een kegel van de vierde klasse.

Reeds hier kan men den graad van dien kegel bepalen. Elk raakvlak van den kegel toch komt overeen met één punt van  $C^6$  en omgekeerd; daarom is de kegel evenals de kernkromme van het geslacht 3 en dientengevolge van den twaalfden graad.

12. *Complexkrommen met drie dubbelraaklijnen.* Eene complexkromme met drie dubbelraaklijnen moet uit drie stralenbundels bestaan. Dat komt in de eerste plaats voor bij alle vlakken, die door een knooplijn gaan. Snijdt bij voorbeeld een vlak door de knooplijn  $H_1 H_2$  de toegevoegde kromme  $Q_{1,2}^3$  in  $P$ , dan bevat dat vlak drie stralenbundels  $P, H_1$  en  $H_2$  van complexstralen. De dubbelraaklijnen  $PH_1, PH_2$  en  $H_1 H_2$  zijn geen singuliere stralen van  $K$ ; daarom is het vlak geen drievoudig raakvlak van  $S$ . Evenwel zijn er twee vlakken door de knooplijn  $H_1 H_2$ , die zich van de overige onderscheiden, omdat het nulvlakken zijn. Wij hebben die vlakken, reeds in art. 8 opgemerkt. Daar werd er op gewezen, dat de knooplijn  $H_1 H_2$  in twee punten  $A$  en  $B$  de toegevoegde kromme  $Q_{1,2}^3$  op de kernkromme ontmoet, en dat het nulvlak van  $A$  (respectievelijk  $B$ ) door  $H_1 H_2$  gaat en de raaklijn van  $Q_{1,2}^3$  in  $A$  (respectievelijk  $B$ ) bevat. Dat nulvlak van  $A$  raakt dan tevens de kernkromme in  $B$ . Daar vallen twee netkegeltoppen samen, waarvan de kegels langs  $H_1 H_2$  het nulvlak aanraken. De daarin voorkomende complexkromme bestaat uit drie stralenbundels, wier toppen  $A, H_1$  en  $H_2$  thans op eene rechte lijn zijn gelegen. Wij komen bij de beschouwing van  $S$  op deze vlakken terug. Maar de mogelijkheid bestaat, dat  $U_{14}$  werkelijke drievoudige raakvlakken bezit, dat er dus nulvlakken zijn, die drie afzonderlijke netkegels aanraken. Om daarover te beslissen, beschouwen



wij weer de ligging van de zes punten der kernkromme  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $p'_1$ ,  $p'_2$ ,  $p'_3$  in het nulvlak  $e$  van  $p$ . Wij vragen ons af, of voor een der drie toegevoegde kegeltoppen  $p'_1$ ,  $p'_2$ ,  $p'_3$ , op de poollijn  $g$  van  $p$  gelegen, ook de poollijn  $g'$  in het nulvlak  $e$  kon geraken. Was dat het geval, dan kon  $g'$ , die altijd door  $p$  moet gaan, niet tegelijkertijd  $q$  en  $r$  bevatten, omdat een zestal punten van  $C^6$ , die met eene ruimtekromme van den derden graad de volledige doorsnede van twee oppervlakken van den derden graad uitmaakt, nooit drie aan drie op twee elkaar snijdende lijnen kunnen liggen. Viel derhalve  $g'_1$  in  $e$ , dan ging die lijn behalve door  $p$  door een der punten  $q$  of  $r$ , en verder door een toegevoegden kegeltop, bij voorbeeld  $p'_3$ .

Dan waren evenwel ten opzichte van het net aan  $p'_3$  zoo-  
wel  $p$  als  $p'_1$  toegevoegd, en moest noodzakelijk de poollijn  $g'_3$  van  $p'_3$  de punten  $p$ ,  $r$  en  $p'_1$  verbinden. In die onderstelling zou het vlak door de kegels  $q$ ,  $r$  en  $p'_2$  worden geraakt en inderdaad drievoudig raakvlak van  $S$  zijn. Het zou het net snijden volgens kegelsneden, die den driehoek  $p$ ,  $p'_1$ ,  $p'_3$  tot gemeenschappelijke pooldriehoek hebben, en de complexkromme zou uit de drie stralenbundels  $p$ ,  $p'_1$ ,  $p'_3$  bestaan.

Dat nu zulke vlakken werkelijk voorhanden zijn, leert de eenvoudige toepassing van de in art. 7 gebruikte coïncidentieformule

$$\varepsilon = e + g'_1 - p,$$

die ons zal doen zien, hoe dikwijls de poollijn  $g'_1$  in  $e$  valt. Hierin is  $g'_1 = 24$ , want de drievoudige koorden van  $C^6$  vormen een oppervlak van den graad 8<sup>1)</sup>, en van de drie op zulk eene koorde gelegen punten kan elk het punt  $p'_1$  zijn. Voorts is  $e = 42$ , omdat door een gegeven punt veertien vlakken  $e$  gaan, die elk drie toegevoegde kegeltoppen bevatten. Eindelijk is  $p'_1 = 18$ , want in een gegeven vlak vallen zes punten  $p'_1$ , waaraan weder drie punten  $p$  zijn toegevoegd. De formule levert  $\varepsilon = 48$ .

Geraakt echter  $g'_1$  in  $e$ , dan liggen, zooals wij zagen,

1) SALMON, *Geometry of three Dimensions*, 4th Ed, blz. 432.

voor elk tweetal hoekpunten van driehoek  $pp_1'p_3'$  de poollijnen in het nulvlak van het derde hoekpunt. Derhalve zijn er  $48:6=8$  nulvlakken met drie verschillende poollijnen of acht vlakken, die geen hoofdpunt bevatten, en wier complex-kromme toch in drie stralenbundels is ontaard. Wij willen langs anderen weg die uitkomst bevestigen.

En wel stellen wij daartoe de vraag: Hoeveel poollijnen  $g$  liggen in het complex  $K$ ? Omdat nu  $K$  van den derden graad is, en de poollijnen een regelvlak van den graad acht vormen, is het antwoord: vier en twintig. Zulke poollijnen, deed de voorafgaande redeneering zien, liggen evenwel drie aan drie in een vlak; daarmede zijn de acht vlakken, die elk drie poollijnen bevatten, opnieuw gevonden.

En hiermede zijn de voornaamste verschijnselen, de complexkromme betreffende, afgehandeld. Verdere ontaarding toch komt niet voor. Het complex  $K$  telt geen hoofdvlakken, waarin iedere lijn complexstraal is, en wel om de eenvoudige reden, dat door de zeven basispunten geen netoppervlak gaat, dat in twee vlakken is uiteengevallen.

13. *Het singuliere oppervlak  $S$ .* Wij gaan er thans toe over zoo nauwkeurig mogelijk het singuliere oppervlak  $S$  te beschrijven. Gaandeweg hebben wij daaromtrent in de vorige artikelen allerlei uitkomsten gevonden, die wij hier nog eens zullen samenstellen en met eenige andere vermeerderen. Voor zoover doenlijk berekenen wij voor  $S$  de verschillende singulariteiten, ten einde te doen zien, hoezeer deze getallen afwijken van die, welke Voss aan het slot van zijne verhandeling voor het straalalgemeen complex van den derden graad opgeeft<sup>1)</sup>.

Vooreerst zagen wij, dat  $S$  is van den graad  $n=24$ <sup>2)</sup>

1) Voss, t. a. p. blz. 158.

2) Wij gebruiken voor de verschillende kenmerkende getallen van  $S$  de notatie van CAYLEY. (SALMON, t. a. p., blz. 592).

Wil men de indirecte bepaling van het graadaantal  $n$  in art. 6 door eene meer rechtstreeksche vervangen, dan kan dit met behulp van eene coincidentieformule gemakkelijk geschieden. Noemen wij  $p$  een netkegeltop,  $q$  een punt op de bijbehoorende basiskromme  $R^*$ ,  $h$  den netkegelstraal, die deze punten verbindt, dan hebben wij

$$\epsilon h = p^2 + q^2 + h_e - h_p.$$

(art. 6) en van de klasse  $n' = 8$  (art. 10); dat het stelsel der dubbelkrommen gevormd wordt door acht en twintig knooplĳnen, door acht en twintig krommen  $Q^3$  (art. 6) en door de kernkromme  $C^6$  (art. 8), wat te zamen eene dubbelkromme van den graad  $b = 118$  vertegenwoordigt. Van die dubbelkrommen gaan door ieder hoofdpunt blijkbaar  $y = 28$  takken, terwijl zij elders een aantal van  $t = 56$  drievoudige punten (art. 8) bezit.

Het onderzoek der keerpuntslijn deed zien, dat deze bestaat uit vier en twintig basiskrommen  $R^4$  (art. 7), zoodat zij als eene kromme van den graad  $c = 96$  moet worden aangemerkt, die met  $z = 24$  takken door elk hoofdpunt gaat en verder op de dubbelkromme  $\beta = 24$  keerpunten telt.

Wanneer wij daarbij in aanmerking nemen, dat de osculatiekegel in een hoofdpunt van de klasse  $\nu = 4$  is (art. 11), dan kunnen wij uit die gegevens tot den graad van veelvuldigheid der hoofdpunten op het singuliere oppervlak beslissen. Een kegel toch van de klasse  $\nu = 4$  met  $y = 28$  dubbelribben en  $z = 24$  keerribben is niet anders dan de algemeene kegel van de vierde klasse, en daarom, zooals reeds in art. 11 bleek, van den graad  $\mu = 12$ . De hoofdpunten zijn derhalve twaalfvoudige punten op het singuliere oppervlak. Uit het voorafgaande volgt bovendien, dat door een hoofdpunt geen vlakken gaan, die het oppervlak  $S$  elders raken.

Wat de reciproke bijzonderheden aangaat, wij troffen (art. 11) een dubbelaanrakend ontwikkelbaar oppervlak  $U_{14}$  van de klasse  $b' = 14$  aan, hetwelk (art. 12)  $t = 8$  drievoudige raakvlakken bezat. Op bijzondere vlakken van anderen aard werd in art. 12 de aandacht gevestigd. Beschouwen wij weder de kromme  $Q_{1,2}^3$ , die de bijbehorende knooplĳn  $H_1 H_2$  en tegelijk de kernkromme  $C^6$  in A en B ontmoet. Wij trachten het raakvlak van  $S$  te vinden in een willekeurig punt P van  $H_1 H_2$ .

Wanneer wij voor de ontaarde basiskromme, bestaande uit

---

Hierin is:  $\varepsilon h = 32$  (art. 7),  $p^2 = 0$ ,  $q^2 = n$ ,  $h_s = 6 \times 2 = 12$ ,  $h_p = 4$ , en daaruit volgt weder

$$n = 24.$$

$H_1 H_2$  en  $Q_{1,2}^s$ , het dubbelpunt in A nemen, moet het singuliere vlak in P den netkegel  $A$  raken en dus met het nulvlak van B samen vallen. Nemen wij daarentegen het dubbelpunt der basiskromme in B, dan zou het singuliere vlak in P met het nulvlak van A samenvallen. Daaruit volgt, dat door de knooplijn  $H_1 H_2$  twee bladen van het oppervlak  $S$  gaan. Het eene blad wordt overal door het nulvlak van A, het andere blad overal door het nulvlak van B geraakt. De knooplijn telt dus tweemaal als »pinch-line», en de beide nulvlakken zijn »pinch-planes» van  $U_{14}$ , welk oppervlak dus  $j' = 56$  van die bijzondere vlakken bezit. Bovendien is het geslacht van  $U_{14}$  blijkbaar gelijk aan dat der kernkromme en daarom gelijk 3; buigvlakken bezit  $U_{14}$  niet, daaruit volgt, dat het aantal schijnbare dubbelvlakken  $k' = 51$  bedraagt, en dat de graad van het oppervlak  $U_{14}$  (eigenlijk rang van de bijbehorende graatlijn) door  $q' = 32$  wordt uitgedrukt.

Merkwaardig is het, dat op  $S$  geene eigenlijke spinodale kromme voorkomt. Immers Voss <sup>1)</sup> bewijst: De meetkundige plaats der toppen van complexkegels met keerribbe is de keerpuntlijn van  $S$ ; de meetkundige plaats van de vlakken der complexkrommen met buigraaklijn is de spinodale omhullende van  $S$ ; de keerraakvlakken der complexkegels raken aan een oppervlak (accessorische Fläche), waarop tegelijk de buigpunten der complexkrommen gelegen zijn. Nu zagen wij (art. 10), dat er geen complexkrommen met buigraaklijn waren, en dat de keerraakvlakken (art. 7) geen eigenlijk oppervlak omhullen, en daaruit mag men opmaken, dat de spinodale kromme met al de daarbij behorende singulariteiten op  $S$  ontbreekt.

Het is thans van belang, om uit al deze getallen de overige singulariteiten van  $S$  te bepalen door middel van de formules van CAYLEY <sup>2)</sup>. Daarbij stuiten wij echter eenigermate op bezwaren, voortkomende uit de aanwezigheid van acht twaalfvoudige punten, die deze formules hunne geldig-

1) VOSS, t. a. p., blz. 144.

2) SALMON, t. a. p., blz. 596.

heid doet verliezen. Die formules onderstellen toch, dat de keerpuntslijn geene werkelijke dubbelpunten bezit, dat op de dubbelkromme hoogstens drievoudige punten voorkomen, en dat er geene kegelpunten zijn van hooger en dan van den tweeden graad. En al kunnen die bezwaren min of meer uit den weg geruimd worden door de verbeteringen van ZEUTHEN <sup>1)</sup>, ook dan nog zijn niet alle getallen van CAYLEY te berekenen, omdat enkele daarvan hunne beteekenis hebben verloren.

Hieronder volgt de lijst der kenmerkende getallen, voor zoover de berekening voor dit bijzonder oppervlak kan geschieden. De getallen tusschen haakjes zijn door Voss voor het straalalgemeen complex van den derden graad gevonden.

graad van het oppervlak . . . . .		$n = 24$ (24).
graad van den raakkegel uit een willekeurig punt (rang van het oppervlak). . . . .		$a = 28$ (84).
aantal dubbelribben { van den kegel. . . . .		$\delta = 284$ (3060).
aantal keerribben }		$\kappa = 60$ (276).
klasse van de »nodal torse" . . . . .		$\rho = 140$ (900).
klasse van de »cuspidal torse". . . . .		$\sigma = 48$ (336).
graad		$b = 118$ (90).
aantal schijnbare dubbelpunten	} van de dubbel- kromme	$k$
aantal werkelijke dubbelpunten		$f$
aantal drievoudige punten		$t = 56$ (120).
aantal »pinch-points"		$j = 0$ .
klasse		$q$
graad	} van de keer- puntslijn	$c = 96$ (96).
aantal schijnbare dubbelpunten		$h$ (3696).
aantal punten »of an unexplained singularity"		$\theta = 0$ .
aantal »close-points"		$\chi = 0$ .
aantal »off-points"		$\omega = 0$ .
klasse		$r$
aantal snijpunten van de dubbelkromme en keerpuntslijn:		
1. keerpunten op de keerpuntslijn . . . . .		$\beta = 24$ (360).
2. keerpunten op de dubbelkromme . . . . .		$\gamma = 0$ (0).

1) SALMON, t. a. p., blz. 603.

3. enkelvoudige snijpunten . . . . .	$i$ .
aantal »cnicnodes» . . . . .	$C=0$ .
aantal »binodes» . . . . .	$B=0$ .
<hr/>	
klasse van het oppervlak . . . . .	$n' = 8$ (24).
klasse van eene vlakke doorsnede (rang van het oppervlak) . . . . .	$a' = 28$ (84).
aantal dubbelraaklijnen } van de doorsnede	$\delta' = 204$ (3060)
aantal buigpunten } van de doorsnede	$\kappa' = 108$ (276).
graad der connodale kromme . . . . .	$\rho' = 60$ (900).
graad der spinodale kromme . . . . .	$\sigma' = 0$ (336).
klasse	$b' = 14$ (90).
aantal schijnbare dubbelvlakken } van de	$k' = 51$ .
aantal werkelijke dubbelvlakken } connodale	$f' = 0$ .
aantal drievoudige vlakken } omhullende.	$t' = 8$ (120).
aantal »pinch-planes»	$j' = 56$ .
graad	$q' = 32$ .
(De getallen dualistisch overeenkomende met de getallen: $c, h, \theta, \chi, \omega, r, \beta, \gamma, i$ hebben betrekking op de spinodale kromme en worden daarom alle nul).	
aantal »cnictropes» . . . . .	$C' = 0$ .
aantal »bitropes» . . . . .	$B' = 0$ .

Ter vergelijking schrijven wij de formules, die voor de bepaling dezer getallen zijn gebruikt. Wij geven aan die formules de nummers, waarmede zij in SALMON voorkomen.

$$\begin{aligned}
 a &= a', \dots\dots\dots 1) \\
 a &= n(n-1) - 2b - 3c, \dots\dots\dots 4) \\
 \kappa' &= 3n(n-2) - 6b - 8c, \dots\dots\dots 5) \\
 \delta' &= \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (n^2-n-6)(2b+3c) + \\
 &\quad + 2b(b-1) + 6bc + \frac{3}{2}c(c-1), \dots\dots\dots 6) \\
 a(n-2) &= \kappa - B + \rho + 2\sigma + 3\omega + \Sigma[x(\mu-2) - \eta - 2\zeta], 7) \\
 b(n-2) &= \rho + 2\beta + 3\gamma + 3t + \Sigma[y(p-2)], \dots\dots\dots 8) \\
 c(n-2) &= 2\sigma + 4\beta + \gamma + \theta + \omega + \varepsilon[z(\mu-2)], \dots\dots\dots 9) \\
 a(n-2)(n-3) &= 2(\delta - C - 3\omega) + 3(ac - 3\sigma - \chi - 3\omega) + \\
 &\quad + 2(ab - 2\rho - j) + \Sigma[x(-4\mu + 7) + 2\eta + 4\zeta], 10)
 \end{aligned}$$

$$a' = n'(n' - 1) - 2b - 3c', \dots\dots\dots 15)$$

$$x = 3n'(n' - 2) - 6b' - 8c', \dots\dots\dots 16)$$

$$\delta = \frac{1}{2}n'(n' - 2)(n'^2 - 9) - (n'^2 - n' - 6)(2b' + 3c') + \\ + 2b'(b' - 1) + 6b'c' + \frac{2}{3}c'(c' - 1), \dots\dots\dots 17)$$

$$a'(n' - 2) = x' - B' + \rho' + 2\sigma' + 3\omega', \dots\dots\dots 18)$$

$$b'(n' - 2) = \rho' + 2\beta' + 3\gamma' + 3\epsilon', \dots\dots\dots 19)$$

$$a'(n' - 2)(n' - 3) = 2(\delta' - C' - 3\omega') + \\ + 3(a'c' - 3\sigma' - x' - 3\omega') + 2(a'b' - 2\rho' - j'), \dots\dots\dots 21)$$

$$q' = b'^2 - b' - 2k' - 2f' - 3\gamma' - 6\epsilon', \dots\dots\dots 24)$$

De termen met het teeken  $\Sigma$  in de formules 7) tot 10) zijn de correcties van ZEUTHEN. Elke som  $\Sigma$  bestaat uit acht termen, waarin

$$\mu = 12, \nu = 4, x = 4, y = 28, z = 24, \eta = 0, \zeta = 0.$$

Met een enkel woord willen wij nog melding maken van de congruentie der singuliere stralen (4, 12). Het brandvlak van zulk eene congruentie bestaat volgens Voss <sup>1)</sup> uit twee afzonderlijke deelen, te weten vooreerst het oppervlak  $S$ , ten tweede de zoogenaamde »accessorische Fläche.”

In het bijzondere geval van het complex  $K$  ontbreekt dit oppervlak; het is vervangen door de kernkromme  $C^3$ . Eene menigte eigenschappen, door Voss medegedeeld, die betrekking hebben op de onderlinge ligging der beide deelen van het brandvlak, hebben voor het complex  $K$  geheel hunne beteekenis gewijzigd.

14. *Het complexvlak  $V$  van een gegeven as  $l$  <sup>2)</sup>.* Onder het complexvlak van een gegeven as  $l$  verstaan wij de meetkundige plaats van de complexkrommen, gelegen in de vlakken door  $l$ , of, wat hetzelfde is, de omhullende van de complexkegels, wier toppen op  $l$  vallen. Onmiddellijk is daarvan de graad en de klasse bekend. Immers door  $l$  gaan zes vlakken, die een der complexkegels aanraken; dus is de top van den kegel volgens art. 5 een punt van zes verschillende complexkrommen.

De lijn  $l$  is daarom eene zesvoudige lijn van  $V$ , en daar verder een vlak door  $l$  eene complexkromme van den zesden

1) Voss, t. a. p., blz. 88.

2) Voss, t. a. p., blz. 138.

graad bevat, is  $V$  van den graad 12. Men behoeft de rede-  
neering slechts dualistisch om te zetten, om in te zien, dat  
ook de klasse door hetzelfde getal wordt uitgedrukt. Op de  
as  $l$  liggen verder vier en twintig pinch-points; het zijn de  
snijpunten van  $l$  met het oppervlak  $S$ , toppen van complex-  
kegels metdubbelribbe. Ieder vlak toch door die dubbelribbe  
moet in zulk een punt raken aan  $V$ , terwijl de dubbelribbe  
zelve tot  $V$  behoort, wanneer men het oppervlak als meet-  
kundige plaats van zijne raakvlakken beschouwt.

Eveneens gaan door de as vier en twintig pinch-planes;  
het zijn ten eerste acht raakvlakken van  $S$ , die eene com-  
plexkromme met dubbelraaklijn bevatten. Zulk een vlak raakt  
 $V$  in elk punt op de dubbelraaklijn, die zelve tot  $V$  behoort,  
als men het oppervlak als meetkundige plaats zijner punten  
aanmerkt.

Ten tweede zijn het de vlakken door de as en een der  
hoofdpunten gebracht. Daarin ligt telkens eene complex-  
kromme met twee dubbelraaklijnen; zij moeten derhalve ieder  
voor twee pinch-planes worden geteld.

Hieruit kan nu, zooals door Voss is aangegeven, de rang  
van  $V$  worden afgeleid. Wij tellen de raaklijnen uit een  
willekeurig punt aan eene gegeven vlakke doorsnede. Vooreerst  
hebben wij dan de vier en twintig lijnen, die het gegeven  
punt met de pinch-points verbinden en de drie raaklijnen  
aan de complexkromme. Daar bovendien het vlak door de  
as een zesvoudig raakvlak is, moet men de lijnen uit het  
gegeven punt naar de snijpunten van de as in de complex-  
kromme tweemaal als raaklijn in rekening brengen. Het ge-  
zamenlijk aantal raaklijnen bedraagt derhalve negen en dertig.  
Het complexvlak bezit verder nog eene keerpuntslijn, waarvan  
wij den grond kunnen bepalen. Daartoe noemen wij  $g_1, g_2, g_3$   
drie complexstralen van een willekeurigen stralenbundel met  
top  $p$  en vlak  $e$ , dan zal de gezochte graad van de keer-  
puntslijn blijkbaar uitgedrukt worden door het symbool

$$\epsilon_3 e^2 p = e^2 p (g_1 + g_2 - p - e) (g_1 + g_3 - p - e),$$

waarin de letters  $e, p, g$  de reeds meermalen vermelde be-  
teekenis hebben.

Voert men de aangewezen vermenigvuldiging uit, vereenigt



men gelijkwaardige symbolen, dan levert de herleiding met behulp van de incidentie-formules van SCHUBERT

$$\epsilon_3 e^2 p = -e^3 p^2 + 3 e^2 g_1 g_2.$$

Hierin is onmiddellijk te stellen

$$e^3 p^2 = 3 \times 2 \times 1 = 6, \quad e^2 g_1 g_2 = 3 \times 3 = 9,$$

zoodat er volgt  $\epsilon_3 e^2 p = 21$  als graad der keerpuntslijn.

De hier gevonden getallen zijn geldig voor het straalalgemeen complex. Behalve door Voss zijn zij ook door SCHUBERT <sup>1)</sup> berekend.

Wij hebben hier alleen de afleiding verricht om zekerheid te bezitten, dat zij voor het zeer bijzondere en niet met zich zelf reciproke complex  $K$  zich niet hebben gewijzigd.

Met deze aanduidingen omtrent het complexvlak  $V$  meenen wij te kunnen volstaan.

15. *De bundel  $\Sigma$  der basiskrommen  $R^4$ .* In bijna alle voorafgaande beschouwingen ontmoetten wij de basiskrommen van het net, en vele uitkomsten, afgeleid met het oog op het complex  $K$ , zijn zonder meer ook van belang voor het onderzoek van den bundel  $\Sigma$  van ruimtekrommen van den vierden graad en van de eerste soort, die door zeven punten gaan. Al dadelijk was het ons bekend, dat in den bundel ééne kromme door een gegeven punt gaat, dat er negen een gegeven vlak osculeeren (art. 4), dat geene enkele kromme eene gegeven lijn tot koorde of raaklijn heeft, tenzij die lijn tot het complex  $K$  behoort. Ook bewijst men gemakkelijk, dat er vier krommen zijn, die twee gegeven lijnen snijden, zoodat wij volgens de schrijfwijze van SCHUBERT hebben

$$P = 1, \quad P' = q, \quad B = 0, \quad T = 0, \quad v^2 = 4.$$

Verder leerden wij het oppervlak  $S$  kennen, dat door de krommen met dubbelpunt werd gevormd en toonde aan, dat het aantal krommen met keerpunt vier en twintig, en dat met twee dubbelpunten acht en twintig bedroeg.

In het bijzonder merkten wij in art. 2 en 4 op, dat een complexstraal  $h$  osculatiekoorde van eene basiskromme kan zijn. Het tangentiaalpunt  $q$  was keerpunt op eene complexkromme, gelegen in het osculatievlak  $e$ ; tegelijk was  $e$  buig-

1) SCHUBERT, t. a. p., blz. 271.

vlak van den complexkegel met den top  $q$ . De vraag doet zich voor, of elke complexstraal osculatiekoorde is. Deze vraag is eigenlijk reeds door Voss beantwoord <sup>1)</sup>, die deed zien, dat iedere complexstraal voor vier kegeltoppen buigstraal, tegelijk voor de vier buigvlakken keerraaklijn wordt, en dat de dubbelverhouding der vier kegeltoppen gelijk is aan die der overeenkomstige buigvlakken.

Wij willen nagaan, of voor het complex  $K$  die stellingen van kracht blijven. Wij denken ons daartoe het netoppervlak  $F^2$ , dat door den gegeven complexstraal  $h$  gaat, en construeeren de ruimtekromme  $R^3$ , die volgens art. 1 aan  $h$  is toegevoegd. De straal  $h$  draagt twee toegevoegde punten  $A, A'$ , daarom snijdt  $R^3$  het oppervlak  $F^2$  elders in vier punten  $o'$ , wier toegevoegden  $o$  op  $h$  vallen. De lijnen  $o o'$  zijn blijkbaar beschrijvende lijnen van  $F^2$ ; de basiskromme  $R^4$  door  $o$  raakt  $o o'$  (art. 2), ligt op  $F^2$  en snijdt  $h$  in  $q$ . Het osculatievlak van  $R^4$  in  $o$  valt, omdat die kromme de beschrijvende lijn  $o o'$  raakt, samen met het raakvlak  $e$  in  $o$  aan  $F^2$ ; daarom is  $q$  tangentiaalpunt,  $o$  osculatiepunt,  $e$  osculatievlak, en wij hebben bewezen, dat inderdaad iedere straal van  $K$  osculatiekoorde is van vier krommen  $R^4$  uit den bundel.

Bedenken wij nu, dat op  $h$  de beide snijpunten met eene veranderlijke basiskromme involutorische puntreeksen beschrijven, dan hebben wij tevens aangetoond, dat de dubbelverhouding der vier punten  $q$  gelijk is aan die der vier vlakken  $e$ , omdat die dubbelverhoudingen even groot zijn als de dubbelverhouding der vier punten  $o$ .

16. *De meetkundige plaats der buigpunten en de omhullende der buigraakvlakken van de krommen  $R^4$ .* Zonder nu Voss verder te volgen in zijne rangschikking der complexstralen, berustende op de groepeerings der tangentiaalpunten  $q$  <sup>2)</sup>, is het toch voor de kennis van  $\Sigma$  wenschelijk ten minste nog de singuliere stralen in dit opzicht te onderzoeken. Wij denken ons  $h$  straal van den netkegel  $p$ , welke kegel derhalve treedt in de plaats van het oppervlak  $F^2$ . De aan  $h$  toegevoegde

1) t. a. p., blz. 63.

2) t. a. p., blz. 69.

$R^3$  ontgaat in een kegelsnee, die de poollijn  $g$  van  $p$  ontmoet. Die kegelsnee snijdt  $h$  in de beide toegevoegde punten  $A$  en  $A'$ , maar kan den kegel niet elders in  $o'$  snijden, omdat volgens de voorafgaande beschouwingen het toegevoegde punt  $o$  in den kegeltop  $p$  zou moeten vallen, wat blijkbaar onmogelijk is. Die kegelsnee moet dus den netkegel  $p$  in  $A$  en  $A'$  raken; de kromme  $R^3$  evenwel door  $A$  gebracht, raakt (art. 2)  $A A'$ , zoodat het tangentiaalpunt  $q$  met het osculatiepunt  $o$  in  $A$  samenvalt. Anders uitgedrukt, hebben wij bewezen, dat het punt  $A$  een buigpunt <sup>1)</sup> is voor de door dit punt gaande basiskromme, en wij besluiten: De meetkundige plaats van de buigpunten der krommen  $R^3$  is het oppervlak  $W$ , meetkundige plaats der toegevoegde punten  $A, A'$  op de netkegelstralen; de omhullende der buigraakvlakken dezer krommen is het singuliere oppervlak  $S$ , tweemaal geteld.

Van het oppervlak  $W$  bepalen wij den graad  $\xi$  met behulp van de coïncidentieformule

$$\epsilon h = A^2 + A'^2 + h_c - h_p.$$

De beteekenis der hier voorkomende symbolen behoeft waarschijnlijk geene nadere uitlegging. Blijkbaar is

$$A^2 = A'^2 = \xi, \quad h_c = 12 \times 2 = 24, \quad h_p = 4 \times 2 = 8.$$

Wat de coïncidentie voorwaarde  $\epsilon h$  betreft, op de acht en veertig netkegelstralen door de hoofdpunten, die eene gegeven lijn ontmoeten, vallen de punten  $A, A'$  samen; wij hebben dus  $\epsilon h = 48$ , en dan volgt  $\xi = 16$ . Het oppervlak  $W$  van den graad 16 bevat de knooplijnen en de kernkromme, terwijl het de hoofdpunten tot veelvoudige punten heeft.

Dat laat zich gemakkelijk bevestigen. Beschouwen wij op een gegeven netoppervlak  $F^2$  de meetkundige plaats van het tangentiaalpunt van het hoofdpunt  $H_1$ , dan is dit eene kromme van den veertienden graad, die in  $H_1$  een zesvoudig punt en in de overige hoofdpunten drievoudige punten heeft <sup>2)</sup>. Op  $F^2$  liggen derhalve zes basiskrommen, waarvoor het hoofdpunt  $H_1$  een buigpunt is. De doorsnede van de opper-

1) Korthedshalve noemen wij de punten eener ruimtekromme, waar het osculatievlak stationair is, „buigpunten.”

2) *Wiskundige Opgeaven*, deel IV, n°. 199, door P. H. SCHOUTE.

vlakken  $W$  en  $F^2$  is derhalve eene kromme met zes takken door ieder hoofdpunt, waaruit volgt, dat die hoofdpunten zesvoudig op  $W$  zijn. Eene gegeven basiskromme  $R^4$  snijdt  $W$ , behalve zesmaal in elk hoofdpunt, nog zestienmaal in hare buigpunten <sup>1)</sup>. Uit het gezamenlijke aantal van vier en zestig doorsnijdingen leidt men af, dat  $W$  van den graad  $\xi = 16$  is.

17. *De congruentie der dubbele osculatiekorden.* Zooals bekend is <sup>2)</sup>, bezit iedere kromme  $R^4$  een aantal van vier en twintig korden, vier aan vier op zes netoppervlakken gelegen, die de eigenschap vertoonen, dat het osculatievlak van ieder uiteinde door het andere uiteinde gaat. Zulk eene koorde zullen wij eene »dubbele osculatiekoorde» noemen. In het vorige art. bleek, dat een willekeurige complexstraal  $h$  drager was van vier paar punten  $o, q$ , die op den straal eene involutie vormden. De straal werd buigraaklijn van eene  $R^4$ , wanneer een der vier punten  $o$ , bijv.  $o_1$ , met het bijbehoorende punt  $q_1$  samenviel. Het zal echter ook voorkomen, dat een der punten  $o$ , bijv.  $o_1$ , samenvalt met het punt  $q_2$ , en uit de involutorische ligging der beide viertallen van punten volgt, dat dan tegelijkertijd ook  $o_2$  in  $q_1$  geraakt, waardoor de straal  $h$  eene dubbele osculatiekoorde wordt. Zulke stralen vormen eene in  $K$  gelegen congruentie, waarvan wij graad en klasse kunnen aangeven.

Beschouwen wij den complexkegel van een willekeurig punt  $P$ , dan weten wij, dat op de stralen van dien kegel de tangentialpunten  $q$  eene kromme van den graad 21, de osculatiepunten  $o$  eene kromme van den graad 13 zullen vormen. Immers iedere straal draagt vier paren  $o, q$ , buitendien komt  $q$  negenmaal,  $o$  éénmaal in  $P$ . Wij passen nu toe de coïncidentieformule

$$\varepsilon = o_1 + q_2 - h,$$

en zoeken het aantal  $\varepsilon$  der coïncidenties tusschen  $o_1$  en  $q_2$  op de complexstralen van  $P$ .

Ingevolge het voorafgaande is het duidelijk, dat

$$o_1 = 13 \times 3, \quad q_2 = 21 \times 3, \quad h = 3 \times 4 \times 3.$$

1) SALMON, t. a. p., blz. 312.

2) SCHRÖTER, *Theorie der Raumkurve vierter Ordnung*, blz. 81.

Wij vinden dus  $\epsilon = 66$ . Door P gaan intusschen veertien nulpuntstralen  $h$ ; zulk een straal gaat door het dubbelpunt van eene basiskromme  $R^4$  en ligt in het vlak der dubbelpuntsraaklijnen. In het dubbelpunt vallen twee punten  $o$  blijkbaar met de toegevoegde punten  $q$  samen; dat telt voor twee oneigenlijke coïncidenties van  $o_1$  en  $q_2$ . De overige coïncidenties zijn derhalve ten getale van  $66 - 28 = 38$ ; zij komen twee aan twee op iederen complexstraal voor, en wij besluiten, dat er negentien dubbele osculatiekoorden door een gegeven punt P gaan. Het is wat bezwaarlijker, om te vinden, hoeveel van die koorden in een gegeven vlak liggen.

Wij beginnen met aan de beschouwingen van art. 15 te ontleenen, dat als wij het osculatiepunt  $o$  in het hoofdpunt  $H_1$  aannemen, de meetkundige plaats van het tangentiaalpunt  $q$  een oppervlak is van den zevenden graad, hetwelk een zesvoudig punt in  $H_1$  heeft. Daaruit volgt, dat, wanneer wij  $q$  eene rechte lijn  $x$  laten doorloopen, een netoppervlak  $2 \times 9 + 8 \times 7 = 74$  van de bijbehorende punten  $o$  bevat. In dat geval beschrijft dus  $o$  eene kromme van den graad 37. Leggen wij door  $x$  een vlak  $\pi$ , dan zal het zeven en dertig malen gebeuren, dat  $o$  in  $\pi$  komt, en wel valt volgens art. 15 het punt  $o$  zestienmaal met  $q$  op  $x$  samen. Er zijn dus een en twintig complexstralen  $h$  in  $\pi$ , die een tangentiaalpunt  $q$  op  $x$  hebben; anders gezegd, de meetkundige plaats van  $q$  op de complexstralen van  $\pi$  is van den graad 21. Wat is de meetkundige plaats der punten  $o$ ?

Dat leert de toepassing der coïncidentieformule

$$\epsilon = o_1 + q_1 - h.$$

Daarin is ten eerste  $q_1 = 21$ ,  $h = 3 \times 4$ ; verder is  $\epsilon = 2 \times 12$ , omdat op de twaalf netkegelstralen van  $\pi$  telkens twee coïncidenties van  $o_1$  en  $q_1$  voorkomen. Wij vinden dus  $o_1 = 15$ ; de meetkundige plaats der punten  $o$  is van den vijftienden graad.

Gaan wij nu ten laatste aanwenden de formule

$$\epsilon = o_1 + q_2 - h,$$

dan is weer

$$o_1 = 15 \times 3, \quad q_2 = 21 \times 3, \quad h = 3 \times 4 \times 3,$$

en wij verkrijgen

$$\epsilon = 72.$$

Op de zes nulpuntstralen in  $\pi$  treffen wij weder twee oneigenlijke coïncidenties aan; de overige coïncidenties tusschen  $o_1$  en  $q_2$  komen altijd twee aan twee op een complexstraal voor. Zoo komen wij tot het besluit, dat er in  $\pi$  een aantal van  $\frac{1}{2}(72 - 12) = 30$  dubbele osculatiekoorden te vinden zijn.

Wij willen ten slotte er nog op wijzen, dat ieder netoppervlak twaalf dubbele osculatiekoorden bevat, die vier aan vier bij drie verschillende basiskrommen behooren, en dan het onderzoek van de beschouwde congruentie niet verder voortzetten. Ook de studie van die scheeve veelhoeken, beschreven in de krommen  $R^4$ , wier zijden door beschrijvende lijnen van een zelfde netoppervlak worden gevormd, ligt buiten het bestek van dit opstel.

18. Enkele veranderingen evenwel, die het complex  $K$  ondergaat, wanneer men de gegeven basispunten in bijzondere ligging brengt, mogen wij niet met stilzwijgen voorbijgaan. Zoo kort mogelijk wijzen wij daarom op de volgende vier gevallen <sup>1)</sup>:

- a) vier basispunten liggen in een plat vlak,
- b) de netoppervlakken hebben een gemeenschappelijk poolviervlak,
- c) drie basispunten liggen in eene rechte lijn,
- d) zeven basispunten liggen op eene ruimtekromme van den derden graad.

19. *Vier basispunten liggen in een plat vlak.* Wij onderstellen voor het net, dat de basispunten  $H_1, H_2, H_3$  en  $H_4$  gelegen zijn in het vlak  $\pi_1$ , dan is het duidelijk, dat door de overige vier  $H_5, H_6, H_7, H_8$  eveneens een plat vlak  $\pi_2$  gaat. Het samenstel der vlakken  $\pi_1, \pi_2$  met de snijlijn  $x$  is als een ontaard netoppervlak te beschouwen. Wij beginnen met een en ander op te merken aangaande de involutorische overeenkomst van de punten  $A$  en  $A'$ , die harmonisch liggen ten opzichte van het net. Aan alle punten  $A$  van een vlak zijn weder de punten  $A'$  van een oppervlak, aan alle punten  $A$

---

1) In de *Wiskundige Opdrachten*, deel V, vraagstuk 15 zijn thans door Dr. P. H. SCHOUTE voor deze en nog andere bijzondere gevallen, alle mogelijke ontaardingën der kernkromme beschreven.

van eene rechte lijn zijn de punten  $A'$  van eene ruimtekromme van den derden graad toegevoegd. Het oppervlak bevat de lijn  $x$ , de kromme snijdt  $x$  tweemaal. Een kegeltop bezit weder eene poollijn, een punt van de lijn  $x$  eveneens; met de punten van  $x$  komen alle punten van eene regelschaar  $G^2$  overeen. Gaat dus een vlak door  $x$ , dan is daaraan een ander vlak door  $x$  benevens het oppervlak  $G^2$  toegevoegd. Snijdt eene lijn  $x$ , dan valt de toegevoegde  $R^3$  uiteen in eene kegelsnee, die  $x$  tweemaal treft, en in eene der beschrijvende lijnen van  $G^2$ .

Wij nemen een vlak  $V$  door  $x$ , benevens een tweede willekeurig vlak  $V'$ , en beschouwen de doorsnede der toegevoegde oppervlakken van den derden graad. Die doorsnede bestaat uit  $x$ , eene der beschrijvende lijnen van  $G^2$ , eene kegelsnee, die in een vlak door  $x$  gelegen is en eindelijk uit de kernkromme  $C^5$  van den vijfden graad, van den rang 12 <sup>1)</sup>, die geheel ligt op het oppervlak  $G^2$ , en die de poollijnen der punten van  $x$  tot drievoudige koorden heeft. Gemakkelijk is het in te zien, dat  $C^5$  door de diagonaalpunten der vierhoeken  $H_1, H_2, H_3, H_4$ , en  $H_5, H_6, H_7, H_8$  gaat en verder  $x$  snijdt in de dubbelpunten van de involutie, welke de netoppervlakken op deze lijn bepalen. De poollijnen van de eigenlijke kegeltoppen op  $C^5$  zijn alle koorden dezer kromme, die  $x$  ontmoeten. Uit dit alles blijkt vooreerst, dat de vlakken  $\pi_1$  en  $\pi_2$  hoofdvlakken zijn van het complex  $K$ ; alle lijnen dezer vlakken zijn enkelvoudige complexstralen. Het singuliere oppervlak  $S$ , meetkundige plaats der basiskromme  $R^4$  met dubbelpunt wordt nu van den graad 20. Immers een willekeurig netoppervlak snijdt  $C^5$  in tien kegeltoppen en bevat derhalve tien basiskrommen met dubbelpunt. De klasse van het oppervlak  $S$  echter heeft de waarde 8 behouden.

Door ieder punt gaan vier netkegelstralen, en daarom noodzakelijk elf nulpuntstralen, omdat een willekeurige complexkegel de kernkromme in vijftien punten ontmoet. Het singuliere oppervlak  $S$  bezit dus een dubbelaanrakend ontwikkelbaar oppervlak  $U_{11}$  van de klasse 11. Herhalen wij

---

1) STURM, t. a. p., blz. 222.

het onderzoek van art. 7, dan worden er achttien basis-krommen  $R^4$  met keerpunt gevonden. De keerpuntslijn van  $S$  is derhalve van den graad 72 met achttien takken door elk hoofdpunt. Wat de acht en twintig knooplijnen betreft, de twaalf, gelegen in de vlakken  $\pi_1$  en  $\pi_2$ , zijn enkelvoudige, de zestien andere tweevoudige lijnen op  $S$ . Bij deze laatste behooren zestien krommen van den derden graad  $Q^3$ , die ook tot het stelsel der dubbelkrommen op  $S$  behooren. In elk hoofdvlak treft men verder nog drie kegelsneden door de vier basispunten aan, die telkens een paar knooplijnen van het andere hoofdvlak op  $x$  ontmoeten. Dat zijn enkelvoudige krommen op  $S$ . Buitendien vindt men in een hoofdvlak twee kegelsneden door de basispunten, die  $x$  raken; zij zullen dubbelkrommen op  $S$  zijn, terwijl de lijn  $x$  zelve eene drievoudige lijn van  $S$  wordt. Het geheele samenstel der dubbelkrommen op  $S$  bestaat derhalve uit de kernkromme, zestien knooplijnen, zestien ruimtekrommen van den derden graad  $Q^3$ , vier kegelsneden en ééne drievoudige lijn, wat eene kromme van den graad 80 vertegenwoordigt, waarvan door ieder hoofdpunt achttien takken gaan.

Het kan gebeuren, dat er nog meer vlakkenparen te vinden zijn, die vier hoofdpunten bevatten. Voor het geval, dat  $K$  zes paar van die hoofdvlakken bezit, kan men raadplegen: » *Wiskundige Opgaven*, deel IV, n°. 69 door Dr. P. H. SCHOUTE", waar de reciproke figuur is onderzocht. Vergelijking van die gevallen met het straalalgemeen complex leidt tot het besluit, dat door de aanwezigheid van een hoofdpunt de klasse van het singuliere oppervlak  $S$  met twee verminderd wordt, terwijl de aanwezigheid van een hoofdvlak den graad van  $S$  eene even groote verandering doet ondergaan.

20. *De netoppervlakken hebben een gemeenschappelijk poolviervlak.* In het complex komen zes paar hoofdvlakken voor; door elke ribbe van het poolviervlak gaan namelijk twee platte vlakken, die te zamen een netoppervlak voorstellen. Daarnaast zijn ook twaalf hoofdpunten aanwezig; het zijn de vier hoekpunten van het poolviervlak benevens de acht basispunten van het net, die twee aan twee op eene rechte lijn liggen met een hoekpunt van het poolviervlak en waarvan



er telkens vier in een hoofdvlak voorkomen <sup>1)</sup>. Elk hoofdvlak bevat dus zes hoofdpunten, hoekpunten van eene volledige vierzijde. Door elk hoofdpunt gaan zes hoofdvlakken, zijvlakken van een volledige viervlakkenhoek. Een singulier oppervlak  $S$  is niet aanwezig, en zoo voort. Eene uitvoerige behandeling is door Dr. P. H. SCHOUTE gegeven <sup>2)</sup>.

21. *Drie basispunten liggen op eene rechte lijn.* In dit geval hebben alle netoppervlakken eene rechte lijn  $x$  gemeen, waarop de drie basispunten zich niet langer van de overige punten onderscheiden. Twee netoppervlakken doorsnijden elkaar verder volgens eene ruimtekromme van den derden graad  $R^3$ , die  $x$  tot koorde heeft, en waarop wij nog vier andere basispunten  $H_1, H_2, H_3, H_4$  aantreffen. Beschouwen wij een willekeurig netoppervlak  $F^2$ , dan vinden wij daarop twee afzonderlijke groepen van complexstralen, te weten lijnen  $g$ , die de lijn  $x$  wel, en lijnen  $g$ , die de lijn  $x$  niet ontmoeten. Eene lijn  $g$  van de tweede groep vormt met  $x$  een tweetal koorden van iedere op  $F^2$  gelegen kromme  $R^3$ , welke door  $H_1, H_2, H_3, H_4$  gaat. De beide vlakkenbundels  $x (H_1 H_2 H_3 H_4)$  en  $g (H_1 H_2 H_3 H_4)$  zijn derhalve steeds projectivisch. Dat is voldoende, om te besluiten, dat het complex  $K$  van den derden graad zich gesplitst heeft in een oneigenlijk lineair complex met  $x$  tot as en in het bekende »tetraedraal complex" <sup>3)</sup>, bepaald door den straal  $x$  en het fundamenteel viervlak  $H_1 H_2 H_3 H_4$ .

22. *Zeven basispunten liggen op eene ruimtekromme van den derden graad.* Thans zijn de basispunten niet meer te onderscheiden. Alle punten van de basiskromme  $R^3$  mogen als basispunten van het net, als hoofdpunten van het complex worden beschouwd. De snijlijnen van  $R^3$  vormen het complex  $K$ ; de koorden zijn dubbelstralen voor al hunne punten. De complexkegel heeft altijd eene dubbelribbe, die keerribbe wordt, wanneer de kegeltop op het bij  $R^3$  behoorende ontwikkelbare oppervlak geraakt.

1) Omtrent de ligging der acht basispunten, vergelijke men fig. 3 van plaat II in deel X van het *Nieuw Archief*.

2) „Sur un complexe du troisième ordre”, t. a. p.

3) REYE, t. a. p., blz. 188.

Verdere bijzonderheden kan de complexkegel, zoolang hij aanwezig is, niet vertoonen! Eene complexkromme bestaat altijd uit drie stralenbundels, wier toppen hoofdpunten zijn. Twee dezer toppen, of ook alle drie, kunnen samenvallen, wanneer het vlak raakvlak of osculatievlak van  $R^3$  wordt.

23. De bijzondere gevallen, hier besproken, hangen niet rechtstreeks samen met de allereenvoudigste invariante voorwaarde, die men aan het oppervlakkennet kan stellen. Die voorwaarde verlangt, dat het net uit eerste poolvlakken van een oppervlak van den derden graad bestaat; hare bevrediging gaat niet met belangrijke wijzigingen van het complex  $K$  gepaard. Alleen zou men kunnen vermelden, dat in dat geval iedere drievoudige koorde der kernkromme ribbe is van een in die kromme beschreven »pentaeder van SYLVESTER" <sup>1)</sup>.

---

1) FRAHM, „Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung“, *Math. Annalen*, Bd. 7, blz. 635.

## LOGARITHMISCHE COÖRDINATEN,

DOOR

A. A. NIJLAND.

---

In het achtste Heft van Band XXXV van den »Civil-ingenieur» geeft Prof. Dr. R. MEHMKE, hoogleeraar aan de Technische Hochschule te Darmstadt, een »Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen.» Prof. MEHMKE had de vriendelijkheid mij een Sonderabdruck van zijn artikel te zenden, en zag gaarne, zoo luidde het begeleidend schrijven, zijn stuk in het hollandsch vertaald, en in een hollandsch tijdschrift geplaatst. Ofschoon nu deze vertaling om verschillende redenen achterwege moest blijven, scheen het mij toch wenschelijk toe, den leden van »Onvermoeide Arbeid», die waarschijnlijk den »Civilingenieur» niet zoo licht in handen zullen krijgen, een overzicht van MEHMKE's belangrijke verhandeling te geven, waaraan dan eenige uitbreidingen zullen worden toegevoegd.

§ 1. Zij op te lossen de hoogere-machtsvergelijking  $f(x) = 0$ .

Onderstellen we aanvankelijk, dat onder de reële wortels der vergelijking positieve voorkomen, dan telt  $f(x)$  één of meer variaties, en het is dus mogelijk,  $f(x) = 0$  te schrijven in den vorm  $f_1(x) = f_2(x)$ , waarin nu beide leden uitluitend uit positieve termen bestaan. .

De vergelijkingen  $y = f_1(x)$  en  $y = f_2(x)$  stellen twee lijnen

voor, voor welker snijpunten geldt

$$f_1(x) = f_2(x), \text{ of } f(x) = 0.$$

De abscissen der snijpunten geven dus de wortels der oorspronkelijke vergelijking, welke derhalve bekend zijn, zoodra men  $y = f_1(x)$  en  $y = f_2(x)$  weet te teekenen.

MEHMKER zoekt nu het *logarithmisch beeld* dezer krommen, dat wil zeggen, tracht punten  $(x', y')$  te vinden, die aan de vergelijking voldoen, en zet op een aangenomen assenstelsel niet  $x'$  en  $y'$  zelf, maar  $\log x'$  en  $\log y'$  als abscis en ordinaat af. Hij bereikt zijn doel op de volgende wijze.

Bestaat  $f_1(x)$  uit slechts één term, dan is  $y = f_1(x)$  voor te stellen door  $y = a x^k$ , waaruit volgt,

$$\log y = \log a + k \log x,$$

of

$$Y = \log a + k X.$$

Hierin zijn nu  $X$  en  $Y$  logarithmische coördinaten. Het logarithmisch beeld der kromme  $y = a x^k$  is blijkbaar een rechte lijn, die de  $Y$ -as snijdt op een' afstand  $\log a$  van den oorsprong, en een' hoek met de  $X$ -as maakt, waarvan  $k$  de tangens is.

Bestaat  $f_1(x)$  uit twee termen, dan schrijven we onze vergelijking in den vorm

$$y = a x^k + b x^l,$$

en teekenen nu de beide rechte lijnen

$$\log y_1 = \log a + k \log x \text{ en } \log y_2 = \log b + l \log x.$$

Voor zekere abscis  $\log x$  zijn de ordinaten  $\log y_1$  en  $\log y_2$  bekend, en zoekt men de ordinaat  $\log y = \log (y_1 + y_2)$  (zie fig. 1). Men maakt daartoe gebruik van een zoogenaamde *additiekromme*, een lijn, welker coördinaten aan de betrekkingen voldoen

$$\xi = \log z,$$

$$\eta = \log \left( 1 + \frac{1}{z} \right),$$

waarin  $z$  verschillende waarden doorloopt; voor elke waarde berekent men  $\log z$  en  $\log \left( 1 + \frac{1}{z} \right)$ , en construeert met behulp van een aangenomen eenheid abscis en ordinaat, die dan samen een punt der additiekromme leveren. Fig. 2 is aldus

geconstrueerd met 35 mM., fig. 4 met 100 mM. als eenheid.

Zij nu (fig. 1) P Q het logaritmisch beeld van  $y = a x^k$ , R S dat van  $y = b x^l$ ; trekt men een lijn M L // de Y-as (met andere woorden kiest men zekere abscis  $\log x_1$ ), dan snijdt deze de lijnen P Q en R S respectievelijk in de punten A en B, zoodat

$$L A = \log y_1 = \log a + k \log x_1,$$

$$L B = \log y_2 = \log b + l \log x_1,$$

en derhalve

$$\begin{aligned} A B &= \log y_2 - \log y_1 = \\ &= \log \frac{y_2}{y_1} \text{ is.} \end{aligned}$$

Men maakt <sup>1)</sup> aan deze A B nu het stuk O  $\alpha$  gelijk in fig. 2, en zoekt het punt  $\beta$  in de additiekromme, waarvan O  $\alpha$  abscis is. Zijn ordinaat zal dan, daar de additiekromme bepaald is door

$$\begin{aligned} \xi &= \log z, \\ \eta &= \log \left( 1 + \frac{1}{z} \right), \end{aligned}$$

zijn

$$\alpha \beta = \log \left( 1 + \frac{1}{\frac{y_2}{y_1}} \right) = \log \left( 1 + \frac{y_1}{y_2} \right) = \log (y_1 + y_2) - \log y_2,$$

of

$$\log y = \log (y_1 + y_2) = \alpha \beta + \log y_2 = \alpha \beta + L B.$$

De gezochte  $\log y$  wordt derhalve gevonden door het stuk L A te vermeerderen met de ordinaat van dat punt der additiekromme, dat A B tot abscis heeft.

Resumeerende: zoek bij A B als abscis de ordinaat van de additiekromme, en maak het stuk B C gelijk aan deze ordinaat, dan is C een punt van het logaritmisch beeld der lijn  $y = a x^k + b x^l$ . Construeert men, telkens een andere lijn L M nemende, zoo een tiental punten C, dan is daardoor zeer gemakkelijk uit de hand de gevraagde kromme te teekenen. Voor haar snijpunt met de Y-as geldt  $\log x = 0$  of  $x = 1$ , zoodat  $y = a + b$  en dus  $\log y = \log (a + b)$  wordt. Dit snijpunt is dus gemakkelijker door berekening te vinden.

1) De figuur is hier niet geheel juist overgebracht.

De additiekromme leert  $\log(y_1 + y_2)$  uit  $\log y_1$  en  $\log y_2$  te vinden, leert dus »*logarithmisch optellen*." Ze blijft voor alle gevallen dezelfde en is derhalve eens voor al te teekenen. Echter moet in elk bijzonder geval de voor het construeeren gebruikte eenheid ook gebezigd zijn voor het teekenen der lijnen

$$\log y = \log a + k \log x,$$

en

$$\log y = \log b + l \log x.$$

Fig. 2 is dus alleen te gebruiken, als men bij het construeeren dezer lijnen 35 mM. als eenheid heeft genomen, fig. 4 alleen, wanneer men 100 mM. gekozen heeft.

Van zelf volgt uit het bovenstaande, hoe men handelt, zoo  $f_1(x)$  drie en meer termen bevat.

Elke term komt overeen met een rechte lijn. We zullen deze rechte lijnen I, II, III, IV, en zoo voort noemen. De lijnen I en II geven de in fig. 1 geconstrueerde kromme I U; uit deze kromme en de lijn III construeert men geheel op de boven aangegeven wijze punt voor punt een logarithmisch beeld van  $y = \phi(x)$ , waarin  $\phi(x)$  nu drie termen bevat. De verbinding van deze kromme met de lijn IV geeft een lijn, waarin vier termen vertegenwoordigd zijn. Men kan deze behandeling natuurlijk voortzetten, totdat alle termen in rekening zijn gebracht.

Construeert men op dezelfde wijs het logarithmisch beeld van de lijn  $y = f_2(x)$ , dan zijn de abscissen der snijpunten van deze lijn met  $y = f_1(x)$  de logarithmen der positieve reële wortels van de vergelijking

$$f(x) = 0.$$

Daar de Briggiaansche logarithmen van negatieve getallen onbestaanbaar zijn, vindt men graphisch natuurlijk alleen logarithmen der positieve wortels; wil men ook de negatieve wortels benaderen, dan verandert men in de oorspronkelijke vergelijking alle wortels van teeken, en zoekt in de nieuwe vergelijking de positieve wortels. Dit omkeeren van het teeken moet al dadelijk plaats hebben, zoo de oorspronkelijke vergelijking alleen negatieve wortels heeft, en dus slechts positieve termen bevat.

## § 2. Opmerkingen.

1<sup>o</sup>. Men is onafhankelijk van den graad der vergelijking; slechts het aantal termen komt in aanmerking.

De vergelijking

$$x^9 - a x^7 + b x^6 - c = 0,$$

kan even snel graphisch opgelost worden als de vergelijking

$$x^3 - a x^2 + b x - c = 0.$$

2<sup>o</sup>. We hebben hier aangenomen, dat  $f_1(x)$  bestaat uit termen als  $a x^k$ ,  $b x^l$  en zoo voort. 't Spreekt van zelf, dat  $f_1(x)$  ook mag bestaan uit  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$  en zoo voort, dat wil zeggen uit willekeurige functien van  $x$ , mits men elk dezer functien afzonderlijk in logarithmisch beeld kan brengen; deze beelden zijn nu geen rechte lijnen meer.

3<sup>o</sup>. De exponenten der termen van  $f_1(x)$  en  $f_2(x)$  behoeven natuurlijk geen geheele positieve getallen te zijn.

De rechte lijn

$$\log y = \log a + k \log x,$$

of

$$Y = \log a + k X,$$

is te construeeren, ook als  $k$  een negatief, gebroken of onmeetbaar getal is.

Zoo kan de vergelijking

$$x^5 - 26 x^4 + 124 x^3 - 103 x^2 + 12 x - 0,2 = 0,$$

of

$$x^5 + 124 x^3 + 12 x = 26 x^4 + 103 x^2 + 0,2,$$

met voordeel geschreven worden in den vorm

$$x^2 + 124 + 12 x^{-3} = 26 x + 103 x^{-1} + 0,2 x^{-3},$$

met voordeel, omdat men hier met minder steile en onderling meer in richting verschillende rechte lijnen te maken heeft, dan als men niet door  $x^3$  deelt.

De drie termen  $x^2$ ,  $124$  en  $12 x^{-3}$  (zie fig. 3 a) geven de kromme lijn ABC; het logarithmisch beeld van het tweede lid is de lijn A' B' C'. De abscissen der vijf snijpunten geven de vijf positieve wortels der vergelijking.

4<sup>o</sup>. Evenals in de stelkunde, geeft ook hier de tweeledige vergelijking iets bizonders. Ze kan geschreven worden in den vorm

$$x^m \pm p = 0.$$

$\alpha$ .

$$x^m - p = 0, \text{ of } x^m = p.$$

Beide leden geven, in logarithmisch beeld gebracht, een

rechte lijn; er is dus zeker één, maar ook niet meer dan één, snijpunt; of, de vergelijking  $x^m = p$  heeft steeds één en slechts één positieven wortel.

β.  $x^m + p = 0$ ,  $x^m = -p$ .

Het tweede lid zou hier aanleiding geven tot de vergelijking  $y = -p$ ;  $\log y$  is dus onbestaanbaar, en daarmede het snijpunt met  $y = x^m$ . Er bestaat geen positieve wortel.

Verandert men in de vergelijking  $x^m \pm p = 0$  alle wortels van teeken, dan zal, zoo  $m$  even is, de vergelijking denzelfden vorm behouden, zoo  $m$  oneven is, echter overgaan in  $x^m \mp p = 0$ ,

Is  $m$  even, dan heeft de nieuwe vergelijking  $x^m + p = 0$  geen,  $x^m - p = 0$  één positieven wortel, en dus de oorspronkelijke vergelijking  $x^m + p = 0$  geen,  $x^m - p = 0$  één negatieven wortel.

Is  $m$  oneven, dan heeft de nieuwe vergelijking  $x^m + p = 0$  geen,  $x^m - p = 0$  één positieven wortel, dus de oorspronkelijke vergelijking  $x^m - p = 0$  geen,  $x^m + p = 0$  één negatieven wortel.

Resumeerende: voor  $m = \text{even}$  heeft  $x^m = p$  één positieven en één negatieven wortel,  $x^m = -p$  geen reëlen wortel.

Voor  $m = \text{oneven}$  heeft  $x^m = p$  één positieven,  $x^m = -p$  één negatieven wortel.

Dezelfde uitkomst verkrijgt men ook in de stelkunde door de formule van DE MOIVRE.

Is  $m$  een gebroken, dan brengt machtsverheffing het vraagstuk tot het behandelde geval terug.

5°. Ook bij het algemeene geval  $y = ax^k + bx^l + cx^m + \dots$  is het snijpunt van de  $Y$ -as weer gemakkelijker onmiddellijk, door berekening, te vinden. Voor dit punt is namelijk  $\log x = 0$  dus  $x = 1$  en  $\log y = \log(a + b + c + \dots)$ .

6°. De graphische methode benadert slechts de wortels. In vele gevallen zal ze, gemakkelijker dan de berekening der Sturmsche functiën dat doen kan, de grenzen  $n$  en  $n+1$  leeren vinden, waartusschen een wortel gelegen is; welke grenzen men kennen moet, om NEWTON's benaderingswijze te kunnen toepassen. Men doet trouwens toch wel, volgens NEWTON verder te benaderen, nadat MEHRKE's methode



een eerste stel waarden voor de onbekenden gegeven heeft.

§ 3. Nadere beschouwing van de additie-kromme. (Figg. 2 en 4).

De punten dezer lijn worden bepaald uit

$$x = \log z, \\ y = \log \left( 1 + \frac{1}{z} \right),$$

waarin  $z$  verschillende waarden doorloopt.

Voor  $z=1$  is  $\log z = 0$ ,  $x=0$  en  $y = \log 2 = 0,301$ ;

voor  $z=10$  is  $x = \log 10 = 1$  en  $y = \log 1,1 = 0,041$ ;

voor  $z=100$  is  $x=2$ ,  $y = \log 1,01 = 0,004$ .

Gemakkelijk is in te zien, hoe het volgende lijstje is samengesteld.

$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0,0	0,301	0,6	0,097	1,2	0,027	1,8	0,007
0,1	0,254	0,7	0,079	1,3	0,021	1,9	0,005
0,2	0,212	0,8	0,064	1,4	0,017	2,0	0,004
0,3	0,176	0,9	0,051	1,5	0,014	2,1	0,003
0,4	0,146	1,0	0,041	1,6	0,011	2,2	0,003
0,5	0,119	1,1	0,033	1,7	0,009	2,3	0,002
						2,4	0,002

Naar dit lijstje zijn de figuren 2 en 4 geconstrueerd, respectievelijk met 35 mM. en 100 mM. als eenheid.

Voor steeds toenemende  $z$  wordt  $x$  grooter en grooter, terwijl  $y$  meer en meer tot 0 nadert; eerst voor  $z = \infty$  is  $x = \infty$  en  $y = \log \left( 1 + \frac{1}{\infty} \right) = 0$ . De  $x$ -as is dus asymptoot.

Voor zekere waarde van  $z$ , bijv.  $z_1$ , vindt men

$$x_1 = \log z_1, \quad y_1 = \log \left( 1 + \frac{1}{z_1} \right).$$

Kiest men een waarde

$$z_2 = \frac{1}{z_1},$$

dan wordt

$$x_2 = \log z_2 = -\log z_1 = -x_1$$

en

$$\begin{aligned} y_2 = \log \left( 1 + \frac{1}{z_2} \right) &= \log (1 + z_1) = \log \left[ z_1 \left( 1 + \frac{1}{z_1} \right) \right] = \\ &= \log z_1 + \log \left( 1 + \frac{1}{z_1} \right) = x_1 + y_1. \end{aligned}$$

Het punt met abscis  $-x_1$  ligt dus even ver boven de bisectrix van het tweede kwadrant, O P, als het punt met abscis  $+x_1$  boven de X-as; waaruit tevens volgt, dat de bisectrix O P asymptoot is voor het negatieve deel van de additiekromme.

Eigenlijk heeft men dit negatieve deel niet eens nodig. Gelijk men rechts van punt S (fig. 1) bij A B als abscis de ordinaat van de additiekromme zoekt en deze ordinaat als B C afzet, zoo kan men links uit D E, als positieve abscis genomen, de ordinaat D J afleiden; maar ook D E als negatieve abscis beschouwen, en daarbij in het negatieve deel van de additiekromme de ordinaat zoeken, aan welke ordinaat nu niet D J maar E J gelijk gemaakt wordt. Dit komt overeen met wat we boven zagen: is  $x_2 = -x_1$  dan is  $y_2 = x_1 + y_1$ .

Blijkbaar is echter de eerste handelwijze nauwkeuriger.

§ 4. Vorm der »logarithmische beelden». Bestaat  $f_1(x)$  uit  $n$  termen, dan wordt het logarithmisch beeld gevormd door de verbinding van  $n$  lijnen van verschillende richting (immers geen twee exponenten zijn aan elkaar gelijk), die elkaar dus steeds snijden in  $\frac{n(n-1)}{2}$  punten. Trekken

we (fig. 5) een lijn L L' evenwijdig aan de Y-as, die geheel links van deze  $\frac{n(n-1)}{2}$  snijpunten ligt, dan wordt deze

lijn door de  $n$  lijnen gesneden naar volgorde van hunne hellingen; de lijn met de geringste helling (waarbij dus de tangens van den hoek met de X-as negatief het grootst is) heeft haar snijpunt het hoogste. Verder zullen de snijpunten  $r_1, r_2, \dots r_n$  des te verder uit elkaar liggen, naarmate de lijn L L' verder links verschoven wordt. Beginnen we met de lijnen I en II logarithmisch samen te tellen, dan moet, bij het verschuiven van L L' naar links, steeds bij grootere abscis

$(r_1, r_2)$  de ordinaat in de additiekromme gezocht worden, welke ordinaat dus tot 0 nadert. De kromme lijn, ontstaande uit I en II heeft dus de lijn II tot asymptoot. (Zie ook fig. 1). Is  $p_2$  het punt, dat de additiekromme uit  $r_1$  en  $r_2$  heeft leeren vinden, dan wordt ook, naarmate  $L L'$  verder links komt,  $r_3, p_2$  steeds grooter; waaruit volgt, dat de kromme, voorstellende de verbinding  $I + II + III$ , de lijn III tot asymptoot heeft. Dit gaat zoo voort. De kromme eindelijk, die het geheele samenstel der  $n$  lijnen voorstelt, heeft tot asymptoot die lijn, welke ten slotte, dat is als men  $L L'$  ver genoeg naar links schuift, het hoogste komt, dat is de lijn met de kleinste helling (Figg. 3 a en 3 b). Op dezelfde wijze is gemakkelijk aan te toonen, dat ook de lijn van de grootste helling asymptoot is. Immers ook rechts wordt die lijn asymptoot, welke ten slotte het hoogste komt; maar dit is hier, zooals de figuur onmiddellijk laat zien, de lijn van de grootste helling.

Alle logarithmische beelden hebben twee reële asymptoten. Maar nog in andere opzichten komen ze onderling overeen. Daar met elke waarde van  $\log x$  slechts één waarde van  $\log y$  overeenkomt, is van dubbel- en keerpunten geen sprake. Verder zijn alle logarithmische beelden van boven open, en bezitten geen inflexiepunten. Men kan namelijk bewijzen, dat  $\frac{d^2 Y}{d X^2}$  steeds positief blijft.

$$\begin{aligned}
 y &= a x^k + b x^l + \dots + h x^r, \\
 Y &= \log y, \quad X = \log x, \\
 \frac{d Y}{d x} &= \frac{\log e}{y} \frac{d y}{d x}, \quad \frac{d X}{d x} = \frac{\log e}{x}, \\
 \frac{d Y}{d X} &= \frac{x}{y} \frac{d y}{d x} = \frac{k a x^k + l b x^l + \dots + r h x^r}{y}, \\
 \frac{d^2 Y}{d X^2} &= \frac{d}{d x} \left( \frac{d Y}{d X} \right) \frac{d x}{d X} = \frac{d}{d x} \left( \frac{d Y}{d X} \right) \frac{x}{\log e} = \\
 &= \frac{(k^2 a x^k + l^2 b x^l + \dots + r^2 h x^r) y - (k a x^k + l b x^l + \dots + r h x^r)^2}{y^2 \log e}
 \end{aligned}$$

Hieruit

$$y^2 \log e \frac{d^2 Y}{d X^2} = (k - l)^2 a b x^{k+l} + (k - m)^2 a c x^{k+m} +$$

$$+ \dots + (k-r)^2 a h x^{k+r} + (l-m)^2 b c x^{l+m} + \\ + \dots + (l-r)^2 b h x^{l+r} + \dots$$

Daar alle termen, volgens hetgeen we omtrent de splitsing van  $f(x)$  hebben aangenomen, positief zijn, is  $\frac{d^2 Y}{d X^2}$  steeds positief.

Een minimum treedt op voor

$$\frac{d Y}{d X} = 0 \text{ of } k a x^k + b l x^l + \dots + r h x^r = 0.$$

Daar  $x$  steeds positief is (anders is  $\log x$  onbestaanbaar) moet voor de voorwaarde  $\frac{d Y}{d X} = 0$  minstens een der exponenten  $k, l, \dots, r$  negatief zijn. De kromme van fig. 1 heeft dus geen minimum, de krommen van fig. 3 a wel.

§ 5. Daar de beide kromme lijnen  $y = f_1(x)$  en  $y = f_2(x)$  in vorm zeer veel overeenkomst kunnen hebben, is het duidelijk (fig. 3 a), dat hun snijpunten niet altijd met groote nauwkeurigheid te vinden zijn. De twee lijnen snijden elkaar meestal onder zeer kleine hoeken. Vooral is dit het geval, als de rechte lijnen, uit welker verbinding  $y = f_1(x)$  en  $y = f_2(x)$  ontstaan, onderling weinig in richting verschillen. Hierdoor wordt verklaard, waarom de vergelijking

$$x^2 + 124 + 12 x^{-2} = 26 x + 103 x^{-1} + 0,2 x^{-3}$$

met meer voordeel te gebruiken is dan de vergelijking

$$x^5 + 124 x^3 + 12 x = 26 x^4 + 103 x^2 + 0,2,$$

gelijk in § 2, 3<sup>o</sup>. gezegd werd.

Deze moeielijkheid is slechts te ontgaan, als men de oorspronkelijke vergelijking niet zóó splitst, dat de beide leden  $f_1(x)$  en  $f_2(x)$  louter uit positieve termen bestaan, maar bijvoorbeeld onze vergelijking

$$x^5 - 26 x^4 + 124 x^3 - 103 x^2 + 12 x - 0,2 = 0$$

schrijft in den vorm

$$x^2 - 26 x + 124 = 103 x^{-1} - 12 x^{-2} + 0,2 x^{-3}.$$

We worden nu voor de taak gesteld, uit de beide rechte lijnen

$$\log y = 2 \log x$$

en

$$\log y = \log 26 + \log x$$

af te leiden de kromme

$$\log y = \log (x^2 - 26 x);$$

met andere woorden, uit

$$\log y_1 \text{ en } \log y_2$$

te vinden

$$\log (y_1 - y_2).$$

We zouden voor dat doel een *subtractie-kromme* kunnen teekenen, een kromme, waarvan de punten bepaald worden uit

$$x = \log z,$$

$$y = \log \left( 1 - \frac{1}{z} \right).$$

Geeft men  $x$  zekere waarde, dan is dus  $\log z$  bekend. De Gaussische tafels geven  $\log (z - 1)$ ; trekt men hiervan  $\log z$  af, dan houdt men  $\log \left( 1 - \frac{1}{z} \right) = y$  over. Op deze wijze is het volgende lijstje, en daarnaar (schaal 1 = 30 mM.) fig. 6 gemaakt.

$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0,033	—1,131	0,133	—0,577	0,4	—0,220	1,0	—0,046
0,067	—0,847	0,167	—0,497	0,6	—0,136	1,2	—0,028
0,100	—0,687	0,2	—0,433	0,8	—0,075	1,4	—0,018

Natuurlijk zijn de  $X$ -as en de  $Y$ -as asymptoten aan de kromme.

Men kan het echter buiten de subtractie-kromme stellen; de additiekromme helpt ons ook hier. Gelijk (fig. 1) uit de punten A en B door logaritmische optelling, om het zo eens uit te drukken, C ontstaan is, zoo moet door logaritmische aftrekking uit C en B punt A weer ontstaan. Daar AB en BC abscis en ordinaat van de additiekromme zijn, vindt men BA, door bij de ordinaat BC in de additiekromme de abscis te zoeken, en deze naar onder of naar boven af te zetten, naarmate ze positief of negatief is. Bij BC (fig. 1) zal men in de additiekromme een positieve abscis vinden, zoodat A onder B komt; bij AC (voor het geval, dat men

A van C logarithmisch wil aftrekken) zal men een negatieve abscis vinden, zoodat de bijbehorende ordinaat naar boven wordt afgezet, en B dus tusschen A en C in komt te liggen.

Wil men (fig. 1) de lijn PQ logarithmisch van RS aftrekken, zoo verkrijgt men slechts uitkomsten rechts van het snijpunt, namelijk zoolang de stukken AB positief zijn; negatieve ordinaten toch komen in de additiekromme niet voor, evenmin als negatieve abscissen in de subtractiekromme.

't Is duidelijk, dat ook hier de lijnen van grootste en kleinste helling asymptoot zijn. Maar bovendien hebben de door logarithmische aftrekking afgeleide krommen nog andere asymptoten.

Zij  $y = f_1(x) = \phi(x) - \psi(x)$ , waarin  $\phi$  en  $\psi$  beide slechts positieve termen bevatten. Is  $\phi(x) = a x^m$ ,  $\psi(x) = b x^n$ , dan komen deze twee termen afzonderlijk met rechte lijnen overeen (fig. 7). Hoe dichter men komt bij het snijpunt S der twee lijnen, des te kleiner wordt de afstand  $p q$ , des te grooter dus de afstand  $q r$ . 't Is hieruit duidelijk, dat de lijn, door  $S // O Y$  getrokken, asymptoot is. Links van die asymptoot ligt geen reële tak der kromme. Keert men echter alle teekens om, dan krijgt men aldaar de in de figuur gestippelde lijn, die ook de lijn ST tot asymptoot heeft.

Fig. 8 is de voorstelling van een algemeener geval.

$C_1$  en  $C_2$  zijn de krommen  $y = \phi(x)$  en  $y = \psi(x)$ . Deze krommen snijden elkaar in drie punten; trekt men hierdoor lijnen  $// O Y$ , dan zijn dat asymptoten; afwisselend liggen tusschen deze asymptoten reële en imaginaire takken der kromme, door logarithmische aftrekking verkregen. Zoolang namelijk  $C_1$  boven  $C_2$  ligt, wordt de tak, die door de logarithmische aftrekking ontstaat, reëel.

Ook figuur 3b vertoont dezelfde eigenaardigheden. 't Is de toelichting van

$$x^2 - 26x + 124 = 103x^{-1} - 12x^{-2} + 0,2x^{-3}.$$

Men ziet, hoe in al deze figuren de bocht niet steeds naar onderen is gekeerd; hoe dus deze krommen ook veel betere snijpunten leveren dan die van bijvoorbeeld fig. 3a. Ook in fig. 3b zijn aan weerszijden der vertikale asymptoten de takken beurtelings reëel en imaginair.

§ 6. Terwijl ons doel tot nu toe was,  $f(x) = 0$ , dat is,

eén vergelijking met één onbekende op te lossen, hebben we eigenlijk de wortels van twee vergelijkingen met twee onbekenden gevonden, namelijk  $y = f_1(x)$  en  $y = f_2(x)$ , al zijn dat dan ook vergelijkingen van zeer bizonderen vorm. Even goed als de abscissen der snijpunten de logaritmen voorstellen der wortels  $x$ , geven de bijbehorende ordinaten de logaritmen der overeenkomstige waarden van  $y$ , waarden echter, die men verder niet gebruikt. Van zelf rijst de vraag: kan men niet elk paar stelkundige vergelijkingen met twee onbekenden logaritmisch-graphisch oplossen? welke vraag nauw samenhangt met deze andere: is het mogelijk, elke stelkundige functie van  $x$  en  $y$  in logaritmisch beeld te brengen?

Op deze laatste vragen hoop ik in de volgende paragrafen een bevestigend antwoord te geven.

Voordat we tot de algemeene vergelijkingen overgaan, is het wellicht beter, eerst eenige bijzondere gevallen, die reeds van zeer ruime toepassing zijn, te behandelen.

1<sup>o</sup>.  $y^*$  (of  $x^*$ ) is, als  $x$  (of  $y$ ) standvastig gedacht wordt, uit een lineaire vergelijking op te lossen.

2<sup>o</sup>.  $y^*$  (of  $x^*$ ) is onder dezelfde omstandigheden uit een vierkantsvergelijking op te lossen.

3<sup>o</sup>. Een geschikte substitutie brengt een vergelijking tot een der vorige twee gevallen terug.

§ 7. Eerste geval. Is  $y^*$ , als  $x$  als standvastige wordt beschouwd, uit een lineaire vergelijking op te lossen, dan kan men de oorspronkelijke vergelijking in den vorm schrijven

$$y^* f(x) = \phi(x),$$

of

$$y^* = \frac{\phi(x)}{f(x)},$$

$$Y = \frac{y_1}{y_2}.$$

De additiekromme leert de afzonderlijke termen van  $\phi(x)$  logaritmisch bij elkaar tellen, en geeft dus  $\log y_1$ . Zoo wordt ook  $\log y_2$  gevonden. Trekt men twee overeenkomstige ordinaten  $\log y_1$  en  $\log y_2$  van elkaar af, dan vindt men

$$\log Y = \log \frac{y_1}{y_2} = n \log y.$$

Van deze ordinaat behoeft dan nog slechts het  $n^{\text{de}}$  deel genomen te worden.

In vele gevallen vervalt de  $f(x)$  van den noemer, en wordt  $y^n$  eenvoudig  $= \varphi(x)$ ; de constructie is nu geheel die van § 1; van alle gevonden ordinaten moet echter het  $n^{\text{de}}$  deel genomen worden.

Voorbeelden.  $\alpha$ . De paraboolfamilie

$$y^n = p x^n, \\ m \log y = \log p + n \log x.$$

Alle parabolen worden, in logaritmisch beeld gebracht, rechte lijnen, waarvan de richting afhangt van de verhouding der exponenten  $n$  en  $m$ .

Voor de gewone parabool is  $n = 1$ ,  $m = 2$ ; verschillende parabolen  $y^2 = p x$ , met variabele  $p$ , worden dus een stel evenwijdige rechte lijnen, waarvoor de tangens van den richtingshoek  $\frac{1}{2}$  is. Fig. 9 stelt twee parabolen voor, waarvoor het stuk op de  $Y$ -as afgesneden respectievelijk 1,1 en  $-3$  is. Dit stuk is blijkbaar  $\log \sqrt{p}$ , zoodat  $p$  respectievelijk de waarden heeft van 167 en 0,000001.

Daar de inhoud van een stuk  $OAB$  van de parabool (fig. 10)  $= \frac{2}{3} x y$  is, wordt in onze figuur 9 deze inhoud al zeer eenvoudig gevonden.

$$I = \frac{2}{3} x y, \\ \log I = \log \frac{2}{3} + \log x + \log y = \\ = \log x + \log y - 0,176.$$

Kwam het punt  $A$  uit fig. 10 overeen met  $P$  in fig. 9, dan had men slechts  $OQ$  en  $PQ$  te meten en samen te tellen en van de som 0,176 af te trekken, om onmiddellijk  $\log I$  te vinden.

Nog zij opgemerkt, dat men slechts dat deel van de parabool in logaritmisch beeld kan brengen, waarvoor zoowel  $x$  als  $y$  positief zijn. Deze opmerking geldt voor alle volgende constructies.

$\beta$ . De cirkel en de ellips. De vergelijking van den cirkel kan geschreven worden als

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Trekt men de beide rechte lijnen

$$\log y_1 = \log r^2$$



en

$$\log y_2 = \log x^2$$

logarithmisch van elkander af, en halveert men de gevonden ordinaten, dan ontstaat het logarithmische beeld van den cirkel: een lijn, die natuurlijk symmetrisch ligt ten opzichte der beide assen en deze assen tot asymptoten heeft (fig. 11).

Vorm, noch grootte, slechts de plaats van het logarithmisch beeld hangt van de waarde van  $r$  af. Vergroot men  $r$  tot  $nr$ , zoo worden  $x$  en  $y$  tot  $nx$  en  $ny$ .

Elke  $\log x$  en  $\log y$  wordt dus vermeerderd met  $\log n$ . Eene vermeerdering der coördinaten kan slechts invloed hebben op de plaats van het logarithmisch beeld ten opzichte van den oorsprong. Bij den cirkel ondergaan abscissen dezelfde vermeerdering als ordinaten, en kan dus de figuur slechts verschoven worden in de richting der bisectrix van den hoek  $XOY$ . De grootte van het logarithmisch beeld hangt slechts af van de eenheid, waarmede men de gebruikte additie-kromme geteekend heeft.

Verandert men in een' cirkel alle ordinaten in dezelfde verhouding en laat men alle abscissen hunne waarden behouden, dan ontstaat een ellips. In het logarithmische beeld blijven alle abscissen dezelfde, maar worden alle ordinaten met hetzelfde bedrag vermeerderd; met andere woorden de figuur behoudt haar vorm en haar grootte, maar wordt in de richting der  $Y$ -as verschoven. Zoo zal ook uitrekking van den oorspronkelijken cirkel, in de richting der  $X$ -as ten gevolge hebben verschuiving van het logarithmische beeld in dezelfde richting, en wel in positieven of negatieven zin, naarmate de reden der vergrooing grooter of kleiner dan 1 is. De twee verschuivingen kunnen natuurlijk verbonden worden, en vervangen door verschuivingen van het assenstelsel. Door een en ander zijn we tot het bewijs gekomen van deze merkwaardige stelling: Alle ellipsen hebben, onafhankelijk van de grootte der assen, een logarithmisch beeld van denzelfden vorm en dezelfde grootte.

γ. De hyperbool  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ . Na het voorafgaande zal het geen verwondering baren, dat ook alle hyperbolen het-

zelfde logaritmische beeld hebben. We kunnen ons dus bepalen tot de gelijkzijdige hyperbool  $x^2 - y^2 = \pm 1$  (Fig. 12), dat is  $y^2 = x^2 \pm 1$ .

De twee logaritmische beelden hebben beide de bisectrix van het eerste kwadrant en verder een der coördinaatassen tot asymptoten, gelijken veel op de additiekromme en zijn symmetrisch gelegen ten opzichte van de genoemde bisectrix; een eigenschap, die ze dus deelen met de gelijkzijdige hyperbool en haar toegevoegde, waaruit ze ontstaan zijn.

't Is wel opmerkelijk dat, terwijl in gewone coördinaten ellips en hyperbool beide ongemerkt in de parabool kunnen overgaan, en dus onderling nauw verwant zijn, hier de drie soorten van kegelsneden zoo streng gescheiden blijven.

### 2. De cissoïde van DIOCLES

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x},$$

te schrijven in den vorm

$$y^{-2} = \frac{2a - x}{x^3} = 2ax^{-3} - x^{-2}.$$

(Zie figg. 13 en 16).

De lijn A B (fig. 13) heeft tot vergelijking

$$\log Y = \log 2a - 3 \log x,$$

de lijn C D

$$\log Y = -2 \log x;$$

de beide lijnen snijden elkander in het punt S. Daar men de tweede logaritmisch van de eerste moet aftrekken, wordt de lijn S T, door S evenwijdig aan de Y-as getrokken, asymptoot; evenals ook de lijn A B. Het imaginaire deel aan den anderen kant der lijn S T zou behalve S T, C D tot asymptoot hebben. Voor het aftrekken is hier de subtractiekromme (fig. 6) gebruikt, waar als eenheid gebruikt was 30 mM; voor  $a$  is 10 genomen.

Na halveering (P Q R) moet van elke ordinaat het teeken worden omgekeerd; dat is, men moet een kromme construeeren, die met P Q R symmetrisch ten opzichte van de X-as ligt <sup>1)</sup>;

1) Deze constructie is in fig 13 achterwege gelaten.

de asymptoten worden nu ST en de lijn door Q (het snijpunt van AB met de X-as), waarvan de richtingstangens  $+\frac{2}{3}$  is. Is dit spiegelbeeld geconstrueerd, dan komt de figuur geheel overeen met fig. 16, waartoe men langs een geheel anderen weg is gekomen. Echter is in deze laatste figuur de eenheid niet 30, maar 50 mM.

Gelijk de cissoïde van DIOPHANTOS, in gewone coördinaten geconstrueerd, doet denken aan een semi-cubische parabool, zoo komen ook de logarithmische beelden van deze beide krommen overeen. De semi-cubische parabool wordt een rechte lijn, met richtingstangens  $\frac{2}{3}$ , de lijn alzoo, die asymptoot is van de cissoïde, en waartoe deze lijn zeer snel nadert.

$$e. \quad (y+c)^2 = x(x-1)^2.$$

Na constructie van het logarithmische beeld van de lijn

$$Y^2 = x^3 - 2x^2 + x$$

moet, met behulp van de additiekromme, uit elke ordinaat  $Y$  en de bekende grootte  $\log c$  de ordinaat  $\log(Y-c)$  gevonden worden.

ζ. De hypo-cycloïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

of

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}.$$

Men construeert eerst weder het logarithmische beeld van de lijn

$$Y = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}},$$

en neemt dan van elke ordinaat het  $\frac{2}{3}$  gedeelte. Deze constructie kost blijkbaar niet meer arbeid, dan die van cirkel en hyperbool.

§ 8. Tweede geval. Als voorbeeld van het geval, waarbij  $y$  uit een vierkantsvergelijking wordt opgelost, nemen we de algemeene vergelijking van den tweeden graad.

$$\begin{aligned} ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c &= 0, \\ by &= -(hx + f) \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}, \end{aligned}$$

waarin

$$A = h^2 - ab, \quad B = hf - bg, \quad C = f^2 - bc.$$

Uit de logarithmische beelden van

$$y_1 = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

en

$$y_2 = h x + f$$

ontstaat dat van

$$y = -(h x + f) \pm \sqrt{A x^2 + 2 B x + C}.$$

(Daar  $y$  steeds positief moet zijn, moet het minus-teeken voor den wortelvorm vervallen, wanneer 1°.  $h x + f$  positief is, of 2°.  $h x + f$  negatief is, en absoluut kleiner dan  $\sqrt{A x^2 + 2 B x + C}$ ).

Men heeft nu nog slechts alle verkregen ordinaten met hetzelfde bedrag  $\log b$  te verminderen.

Was de  $Y$ , die men op die wijze vindt, weer een macht van  $y$ , dan zou men de gevonden ordinaten nog in zooveel deelen moeten verdeelen, als de exponent van die macht aangeeft.

§ 9. Derde geval. Door substitutie wordt een vergelijking tot de gevallen der vorige twee paragrafen teruggebracht. Ook hier zullen we ons bepalen tot een voorbeeld.

De limaçons van PASCAL zijn cirkelconchoïden. Trekt men uit een punt van den omtrek eens cirkels verschillende koorden, en verlengt men al die koorden met hetzelfde stuk  $b$ , dan ontstaat een kromme lijn, die tot vergelijking heeft

$$r = 2 a \cos \phi + 2 b,$$

waarin  $a$  de straal van den gebruikten cirkel is. Deze vergelijking is te schrijven als

$$r^2 = 2 a r \cos \phi + 2 b r,$$

$$r^2 = 2 a x + 2 b r,$$

of

$$r = b \pm \sqrt{b^2 + 2 a x}.$$

Daar men slechts positieve abscissen gebruikt, is  $\sqrt{b^2 + 2 a x}$  grooter dan  $b$ , zoodat het minus-teeken moet vervallen. Construeert men het logarithmisch beeld van  $r = b + \sqrt{b^2 + 2 a x}$ , dan komt met elke  $x$  een  $r$  overeen. Daar  $y^2 = \sqrt{r^2 - x^2}$ , kan uit een abscis en de bijbehorende  $r$  gemakkelijk de overeenkomstige  $y$  worden gevonden.

§ 10. Natuurlijk kunnen ook bij het gebruik van logarithmische coördinaten scheefhoekige assen soms noodig, soms gewenscht zijn. Zoo zal men dikwijls met voordeel de vergelijking van een ellips op toegevoegde middellijnen kunnen

gebruiken; het vinden van het logarithmisch beeld biedt in dit geval geen grootere moeilijkheden, dan we boven ontmoet hebben.

Zeer eenvoudig wordt de vergelijking van een hyperbool op de asymptoten, namelijk

$$xy = a^2, \\ \log x + \log y = 2 \log a.$$

Het logarithmisch beeld is blijkbaar een rechte lijn (fig. 14), die met de beide assen een gelijkbeenigen driehoek vormt. De stukken  $OA$  en  $OB$  toch, op de assen afgesneden, zijn beide gelijk aan  $2 \log a$ .

§ 11. We zijn nu aan het algemeene geval genaderd.

De vraag is dus, een kromme, die tot vergelijking heeft

$$ax^m y^n + bx^p y^q + \dots = 0,$$

in logarithmisch beeld te brengen. Ook hier gelden gedeeltelijk dezelfde opmerkingen, als in § 2 gemaakt zijn. De arbeid, die de oplossing kost, hangt niet af van den graad der vergelijking, maar slechts van het aantal termen.

De exponenten behoeven geen geheele positieve getallen te zijn. Daar men slechts positieve abscissen en ordinaten kan gebruiken (van negatieve toch zijn de Briggiaansche logarithmen onbestaanbaar), moet minstens een der coëfficiënten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  negatief zijn. Zijn ze alle positief, dan kan men alle abscissen of alle ordinaten of beide van teeken veranderen, en dus als het ware het spiegelbeeld van de gevraagde lijn ten opzichte van  $Y$ -as,  $X$ -as of oorsprong construeeren.

Beginnen we met de tweetermige vergelijking  $ax^m y^n = b$ , welke vorm zoo algemeen mogelijk is; omtrent  $m$  en  $n$  behoeven geen onderstellingen te worden aangenomen.

$$x^m y^n = \frac{b}{a} = b',$$

$$m \log x + n \log y = \log b'.$$

Het logarithmische beeld van de kromme, die tot de paraboolfamilie behoort, is dus een rechte lijn, met een richtingstangens, die afhangt van de verhouding der exponenten  $m$  en  $n$ . We kwamen reeds in § 7  $a$  tot deze uitkomst.

Elke drietermige vergelijking kan geschreven worden in den vorm

$$ax^m y^n + bx^p y^q = c.$$

Men kan deze vergelijking splitsen in twee andere

$$a x^m y^n = c - d, \dots \dots \dots (I)$$

$$b x^p y^q = d. \dots \dots \dots (II)$$

Zoowel (I) als (II) heeft, voor zekere waarde van  $d$ , een rechte lijn tot logarithmisch beeld; de twee rechte lijnen zullen elkaar snijden, zoolang niet  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$  is. Voor het snijpunt gelden de vergelijkingen (I) en (II) gelijktijdig, geldt dus de vergelijking

$$a x^m y^n + b x^p y^q = c.$$

Daar dit snijpunt logarithmische coördinaten heeft, is het een punt van het logarithmisch beeld der oorspronkelijke drieledige vergelijking. Voor elke andere waarde van  $d$  vindt men een ander punt. De constructie dezer punten wordt zeer vereenvoudigd, doordat het stelsel (I), voor veranderlijke  $d$ , uit evenwijdige rechte lijnen bestaat, evenals ook het stelsel (II).

Men heeft dus slechts aan  $d$  een aantal, bij voorbeeld twintig, waarden toe te kennen, met deze twintig waarden de stelsels evenwijdige lijnen (I) en (II) te construeeren, en de snijpunten op te zoeken van de eerste lijn van (I) met de eerste lijn van (II), in het algemeen van de  $k^{\text{de}}$  lijn van (I) met de  $k^{\text{de}}$  van (II).

Op deze wijze is in fig. 15 het logarithmisch beeld geconstrueerd van het folium van DESCARTES (wel te verstaan van het gedeelte dezer lijn, dat in het eerste kwadrant ligt).

De vergelijking van het folium

$$x^3 + y^3 - 3 a x y = 0$$

is geschreven in den vorm

$$x^2 y^{-1} + y^2 x^{-1} = 3 a.$$

Ik heb  $a = 100$  genomen, en nu gesplitst in

$$x^2 y^{-1} = 300 - d,$$

$$y^2 x^{-1} = d,$$

waarbij  $d$  de veertien waarden 20, 40, 60, .... 260, 280, dus  $300 - d$  de waarden 280, 260, 240, .... 40, 20 heeft. Ik heb nu twee stelsels evenwijdige lijnen geteekend, respectievelijk met richtingstangens  $\frac{1}{2}$  en 2; de leden van elk stelsel zijn op afstanden geplaatst, evenredig aan  $\log 20$ ,

$\log 40, \dots \log 280$ . Als eenheid is genomen 90 m.M. Gemakkelijk is door de snijpunten van de overeenkomstige lijnen der twee stelsels de kromme  $abc$  te trekken.

Voor  $d = 300$  wordt  $c - d = 0$  en  $\log(c - d) = -\infty$ . De lijnen overeenkomende met deze waarde van  $d$ , snijden elkaar dus in het oneindige, waaruit gemakkelijk volgt, dat het logaritmische beeld der lijn

$$x^{-1}y^2 = 300,$$

dat is de rechte lijn

$$-\log x + 2 \log y = \log 300,$$

(de lijn RS) asymptoot aan de kromme is. Zoo ook de lijn PQ, waarvoor  $d = 0$  dus  $c - d = 300$  is.

Ik heb, om de figuur niet te groot te maken, het assenstelsel in de richtingen OX en OY 150 m.M. verschoven. Elke  $\log x$  en  $\log y$  is daardoor 150 m.M. kleiner geworden, dat is in onze eenheid van 90 m.M.  $1\frac{1}{3}$ . Elke  $x$  en  $y$  is dus

geworden  $\frac{x}{10\frac{1}{3}}$  en  $\frac{y}{10\frac{1}{3}}$ , wat weer tengevolge gehad heeft,

dat ook de oorspronkelijke  $a$  in fig. XV niet 100, maar  $\frac{100}{10\frac{1}{3}}$  of 2,154 is. Natuurlijk moet men deze verschuiving slechts

zeer voorzichtig toepassen, en vooral steeds in beide richtingen evenveel verplaatsen; de figuur moet, gelijk ook het geval is met het folium in gewone coördinaten, symmetrisch blijven ten opzichte van de bisectrix van het eerste kwadrant. Gaat deze symmetrische ligging verloren, dan heeft men niet meer het logaritmisch beeld van het folium, maar van een folium, dat in één richting, bij voorbeeld in die der  $X$ -as, is uitgerekt. Immers blijven bij een verschuiving naar één richting bij voorbeeld alle ordinaten gelijk, terwijl alle abscissen  $\log x$  met eenzelfde bedrag worden vermeerderd, dus in de oorspronkelijke figuur alle abscissen, bij gelijk blijvende ordinaten, in dezelfde verhouding worden vergroot.

Als tweede voorbeeld eener drietermige vergelijking nemen we de Cissoïde van DIOCLES, nu geschreven in den vorm

$$x^3 y^{-2} + x = 2a,$$

welke vergelijking voor  $a = 10$  gesplitst is in

$$x^3 y^{-2} = 20 - d,$$

$$x = d,$$

terwijl aan  $d$  achtereenvolgens de waarden 2, 4, . . . . 18 zijn toegekend. Fig. 16 is op deze wijze geconstrueerd; de eenheid is 50 m.M. Asymptoten treden weer op voor de waarden  $d=20$  en  $d=0$ ; de vergelijking der asymptoten zijn klaarblijkelijk

$$3 \log x - 2 \log y = \log 20,$$

en

$$\log x = \log 20;$$

de asymptoten zelf de lijnen  $pq$  en  $rs$ ; de eerste dezer lijnen heeft tot richtingstangens  $\frac{1}{2}$ , zoodat de figuur geheel overeenkomt met fig. 13.

§ 12. Daar de drietermige vergelijking geen drie positieve, dus ook geen drie negatieve termen mag bevatten, bestaat ze òf uit twee positieve en één negatieve (het geval van de vorige paragraaf), òf uit één positieve en twee negatieve; vermenigvuldiging met  $-1$  brengt de vergelijking nu tot het daar beschouwde terug. Wil men niet met  $-1$  vermenigvuldigen, dan kan toch de vergelijking

$$a x^m y^n - b x^p y^q = c,$$

zeer goed in logarithmisch beeld gebracht worden door te splitsen in

$$a x^m y^n = c + d,$$

en

$$b x^p y^q = d.$$

Bij vier- en meertermige vergelijkingen moet men soms tot deze splitsing zijn toevlucht nemen.

Voordat we met deze meertermige vormen een aanvang maken, moet nog een constructie van het logarithmisch beeld van drietermige vergelijkingen vermeld worden, die zich meer aansluit bij MEHMKE's methode, dan de wijze, waarop in § 11 gehandeld is.

Voor een willekeurige, bekende abscis wordt bij een drietermige vergelijking  $y$  gevonden uit een betrekking van dezen vorm

$$1 + A y' = B y'',$$

of



of  $\log(1 + A y^t) = \log B + u \log y$ ,  
 waarin  $A$  en  $B$  ook  $x$  bevatten.

Stel

$$A y^t = \frac{1}{z},$$

dan is

$$y = (A z)^{-\frac{1}{t}}.$$

De vergelijking wordt nu

$$\begin{aligned} \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) &= \log B + u \log (A z)^{-\frac{1}{t}} = \\ &= \log B - \frac{u}{t} \log (A z) = \\ &= \log B - \frac{u}{t} (\log A + \log z) = \\ &= \log C - \frac{u}{t} \log z, \end{aligned}$$

of

$$\log\left(1 + \frac{1}{z}\right) + \frac{u}{t} \log z = \log C.$$

Hierin is

$$\log C = \log B - \frac{u}{t} \log A,$$

dus

$$C = B A^{-\frac{u}{t}}.$$

Nu zijn  $\log z$  en  $\log\left(1 + \frac{1}{z}\right)$  steeds abscis en ordinaat van de additiekromme (fig. 4). Tusschen deze coördinaten moet derhalve de betrekking bestaan:

$$\eta + \frac{u}{t} \xi = \log C,$$

$$t \eta + u \xi = \log C^t.$$

Het punt  $(\xi, \eta)$  ligt dus, behalve op de additiekromme, op een rechte lijn  $AB$ , als (fig. 4)  $OA = \log C$  is en  $OB = \log C^t$ . De abscis  $OQ$  van het snijpunt  $R$  van  $AB$  en de additiekromme is  $\log z$ ; daar

$$y = (A z)^{-\frac{1}{t}}$$

en dus

$$\begin{aligned}\log y &= -\frac{1}{t} \log A z = \\ &= -\frac{1}{t} (\log A + \log z)\end{aligned}$$

is, wordt ook  $\log y$  bekend, en daarmede is een punt der kromme

$$1 + A y^t = B y^s$$

logarithmisch geconstrueerd.

Voor een andere abscis veranderen wel  $A$  en  $B$ , dus het stuk  $OA$  van fig. 4, doch blijven  $u$  en  $t$  en daarmede de richting van de lijn  $AB$  dezelfde.

Behalve dat deze methode niet zoo snel en zoo gemakkelijk tot het doel leidt, als de in § 11 gevolgde, heeft ze bovendien het groote nadeel, dat ze niet gemakkelijk uitgebreid kan worden op vier- en meertermige vergelijkingen.

§ 13. De viertermige vergelijking heeft den vorm

$$a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s = d,$$

en kan dus gesplitst worden in

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e,$$

en

$$c x^r y^s = e.$$

Laten we aan  $e$  ettelijke, bijvoorbeeld  $t$ , waarden geven, die regelmatig grooter worden, zoodat  $e_{i+1} = e_i + \Delta$  is, waarin  $\Delta$  steeds dezelfde waarde behoudt. Voor elke waarde van  $e$ , bijvoorbeeld  $e_k$ , heeft dan  $c x^r y^s = e_k$  een rechte lijn tot logarithmisch beeld. Laat men  $k$  van 1 tot  $t$  veranderen, dan komt met  $c x^r y^s = e$  een stelsel van  $t$  evenwijdige, rechte lijnen overeen.

Het logarithmisch beeld der kromme

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e_k$$

is volgens § 11 te construeeren, doordat men deze vergelijking splitst in

$$a x^m y^n = d - e_k - f, \dots \dots \dots (I)$$

$$b x^p y^q = f; \dots \dots \dots (II)$$

waarin  $f$  achtereenvolgens verschillende, bijvoorbeeld  $u$ , waarden krijgt. Nemen we aan, dat ook deze waarden regelmatig

en wel met hetzelfde bedrag  $\Delta$  opklimmen, zoodat steeds

$$f_{j+1} = f_j + \Delta,$$

dan dienen de stelsels rechte lijnen (I) en (II) niet alleen voor de logarithmische constructie van de kromme

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e_k,$$

doch leveren de gegevens, om de geheele reeks krommen

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e,$$

waarin  $e$  verandert van  $e_1$  tot  $e_t$ , in logarithmisch beeld te brengen.

We construeeren namelijk logarithmisch een punt van

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e_k,$$

door het snijpunt te zoeken van de  $j^e$  lijn van het stelsel (I) met de  $j^e$  lijn van het stelsel (II), het snijpunt dus van de logarithmische beelden der lijnen

$$a x^m y^n = d - e_k - f_j,$$

en

$$b x^p y^q = f_j.$$

Zoeken we echter het snijpunt van de  $(j+1)^e$  lijn van het stelsel (I) met de  $j^e$  lijn van het stelsel (II), het snijpunt dus van de logarithmische beelden der lijnen

$$a x^m y^n = d - e_k - f_{j+1},$$

en

$$b x^p y^q = f_j,$$

en houden we in het oog dat

$$f_{j+1} = f_j + \Delta$$

is, dan blijkt het, dat we een logarithmisch punt vinden van de lijn

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e_k - \Delta,$$

dat is van de lijn

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e_{k+1}.$$

Immers ook

$$e_{k+1} = e_k + \Delta.$$

We hebben dus nu reeds de logarithmische beelden gevonden der twee lijnen

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e_k,$$



(in dit geval  $x^2 y^{-1} + y^2 x^{-1} = 3a - e$ ), waarin  $e$  verschillende waarden  $e_1, e_1 + \Delta, e_1 + 2\Delta$ , en zoo voort, heeft. We zullen dit het stelsel (III) noemen.

Snijden we dit stelsel door het stelsel rechte lijnen

$$c x^r y^s = e, \dots \dots \dots (IV)$$

dan krijgen we een aantal punten van het logarithmisch beeld der lijn

$$a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s = d.$$

We hebben hier weer het snijpunt gezocht van  $(IV)_1$  met  $(III)_1$ ,  $(IV)_2$  met  $(III)_2$ , en zoo voort. Hadden we  $(III)_1$  met  $(IV)_2$  verbonden,  $(III)_2$  met  $(IV)_3$ , en zoo voort, dan zouden we punten gekregen hebben van het logarithmisch beeld der lijn

$$a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s = d_1,$$

waarin  $d_1 = d + \Delta$  is.

Immers  $(III)_1$  komt overeen met

$$a x^m y^n + b x^p y^q = d - e_1,$$

$(IV)_2$  met

$$c x^r y^s = e_2,$$

dat is

$$c x^r y^s = e_1 + \Delta.$$

Voor het snijpunt van  $(III)_1$  en  $(IV)_2$  geldt dus

$$\begin{aligned} a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s &= d + \Delta = \\ &= d_1. \end{aligned}$$

De snijpunten der stelsels (III) en (IV) geven niet alleen de kromme, voorgesteld door de viertermige vergelijking

$$a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s = d, \dots \dots \dots (V)$$

maar een geheel stelsel krommen van dezen vorm, waarin  $d$  verandert. Dit stelsel (V) geeft, door snijding met het stelsel rechte lijnen

$$l x^v y^w = m - d, \dots \dots \dots (VI)$$

het logarithmisch beeld der vijftermige vergelijking

$$a x^m y^n + b x^p y^q + c x^r y^s + l x^v y^w = m.$$

We zien, hoe men zonder al te veel moeite steeds vergelijkingen met meer termen kan behandelen.

De hoofdzak is hierbij, dat men steeds dezelfde  $\Delta$  behoudt. Hoe groot  $\Delta$  moet genomen worden, hangt van verschillende

omstandigheden af. Dikwijls is het zaak eerst een voorloopige kladteekening te maken en daarnaar te beoordeelen, wat de beste keus voor  $\triangle$  is. Wil men de teekening niet te zeer overladen door de stelsels rechte lijnen (II), (IV), (VI) en zoo voort, dan kan men deze elk afzonderlijk op transparant papier construeeren. Van praktisch belang is eindelijk nog de opmerking, dat alle logaritmische beelden zeer snel tot hun asymptoten naderen. Men kan bijvoorbeeld de lijnen  $abc$  en  $a'b'c'$  van fig. 15 zonder te groote onnauwkeurigheid met de liniaal verder teekenen.

§ 14. De oplossing van twee vergelijkingen met twee onbekenden volge tot slot <sup>1)</sup>.

Gegeven

$$\begin{aligned}x^3 - 300xy + y^3 &= 0, \\xy &= 9747,4.\end{aligned}$$

Eliminatie van  $y$  voert tot de tweede machtsvergelijking

$$\begin{aligned}(x^3)^2 - 300 \times 9747,4 x^3 + (9747,4)^3 &= 0. \\x^3 &= 1462110 \pm \sqrt{(1462110)^2 - (9747,4)^3}, \\&= 1462110 \pm 1100740, \\x^3 &= 2562850 \text{ of } 361370, \\x &= 136,85 \text{ of } 71,23.\end{aligned}$$

Daar  $x$  en  $y$  in de beide vergelijkingen symmetrisch voorkomen, zijn de waarden van  $y = 71,23$  en  $136,85$ . Het product  $xy$  wordt volgens deze waarden  $9747,8$ .

In fig. 15 is de vergelijking

$$x^3 - 300xy + y^3 = 0$$

in logaritmisch beeld gebracht; als eenheid is 90 mM. aangenomen; het assenstelsel is 150 mM. naar rechts en naar boven verschoven.

Dezelfde handelwijze moet natuurlijk ook gevolgd worden bij het in teekening brengen van

---

1) Dit is een der voornaamste toepassingen der logaritmische coördinaten. Een andere is de constructie van krommen, een arbeid, die soms zeer veel moeite kan kosten, en waarvoor men, als de graad der vergelijking hoog is, allerlei hulpmiddelen te baat moet nemen. Heeft men, steeds op de wijze van § 13, het logaritmisch beeld geconstrueerd, dan kan men hierin bijvoorbeeld twintig punten uitkiezen, hunne abscissen en ordinaten meten, en bij deze logarithmen de getallen zoeken, waardoor men onmiddellijk twintig punten der kromme kan construeeren.

$$xy = 9747,4,$$

of

$$\log x + \log y = 3,98888.$$

In onze eenheid van 90 mM. wordt deze vergelijking

$$\log x + \log y = 359,$$

en na verschuiving van het assenstelsel (waardoor elke  $\log x$  en  $\log y$  150 mM. kleiner wordt)

$$\log x + \log y = 59.$$

Men behoeft dus slechts de rechte lijn AB te teekenen (fig. 15), die op de assen stukken van 59 mM. afsnijdt. Haar snijpunten met het logaritmisch beeld van

$$x^3 - 300xy + y^3 = 0$$

zijn  $\alpha$  en  $\beta$ , welke punten abscissen hebben van  $17\frac{1}{4}$  m.M. en 42 m.M., dat is dus eigenlijk van  $167\frac{1}{4}$  m.M. en 192 m.M. In onze maat worden die twee lengten voorgesteld door de getallen 1,8611 en 2,1333. Zoekt men bij deze logaritmen de getallen op, dan vindt men 72,6 en 135,8 als waarden voor  $x$ , waarbij dan, om de symmetrie 135,8 en 72,6 als  $y$ 's zouden behooren. 135,8 en 72,6 zijn derhalve  $x$  en  $y$  voor het punt  $\beta$ ; tusschen deze coördinaten moet dus de betrekking bestaan

$$\log x + \log y = 3,98829.$$

Een blik op de helling der kromme  $abc$  in de nabijheid van  $\beta$  doet zien, dat  $x$  daar veel scherper kan bepaald worden dan  $y$ . Men doet dus wèl,  $y$  te berekenen uit bovengenoemde betrekking. Voor  $\log x$  vond men 2,1333, zoodat  $\log y = 1,15556$  en daarmede  $y = 71,7$  wordt. Als wortels der vergelijkingen

$$x^3 - 300xy + y^3 = 0$$

en

$$xy = 9747,4$$

vindt men dus ten slotte

$$x = 135,8, \quad y = 71,7,$$

$$x = 71,7, \quad y = 135,8,$$

waarden, die vrij wel met de door berekening gevondene overeenstemmen.

Ofschoon in dit voorbeeld de oplossing door rekening geen

zwarigheden aanbiedt, geeft ook de graphische methode hierbij snel en gemakkelijk uitkomsten, vooral als men toegerust is met een werktuigje om op willekeurige afstanden evenwijdige lijnen te trekken. Door een kleine wijziging in de opgaaf kan men echter de schaal ten gunste der graphische methode laten overslaan.

Gesteld, dat opgelost moeten worden de vergelijkingen

$$x^3 - 300 xy + y^3 = 0,$$

$$x^4 y^5 = 7,7424 \times 10^{17}.$$

Eliminatie van  $x$  doet hier stuiten op een vergelijking van den 27<sup>en</sup> graad in  $y$ , die termen bevat met  $y^{27}$ ,  $y^{17}$ ,  $y^{14}$ ,  $y^7$  en  $y^0$ . De graphische methode lost echter deze vergelijking even gemakkelijk op als de vorige opgaaf.

De lijn

$$x^3 - 300 xy + y^3 = 0,$$

heeft steeds tot logarithmisch beeld de lijn  $abc$  uit fig. 15.

A B wordt nu vervangen door

$$4 \log x + 5 \log y = 17,88889,$$

dat is in onze eenheid

$$4 \log x + 5 \log y = 1610.$$

Daar in fig. 15 elke  $\log x$  en  $\log y$  150 m.M. kleiner zijn genomen, geldt voor de te construeeren lijn de betrekking

$$\begin{aligned} 4 \log x + 5 \log y &= 1610 - 9 \times 150 = \\ &= 260, \end{aligned}$$

zoodat de stukken, op X- en Y-as afgesneden, 65 en 52 m.M. bedragen. Op deze wijze is CD geteekend. Men vindt de wortels der gegeven vergelijkingen door de abscissen en ordinaten te meten der punten  $\gamma$  en  $\delta$ , waar CD de lijn  $abc$  snijdt.

$$(\text{Voor } \gamma) \begin{cases} \log x = 42,7 \text{ m.M.}, \\ \log y = 18,5 \text{ m.M.}; \end{cases} \quad (\text{Voor } \delta) \begin{cases} \log x = 14 \text{ m.M.}, \\ \log y = 40,8 \text{ m.M.} \end{cases}$$

Na vermeerdering met 150 m.M.

$$\begin{aligned} \log x &= 192,7 \text{ m.M.}, \\ \log y &= 168,5 \text{ m.M.}; \end{aligned} \quad (\gamma) \quad \begin{aligned} \log x &= 164 \text{ m.M.}, \\ \log y &= 190,1 \text{ m.M.}; \end{aligned} \quad (\delta)$$

dat is

$$\begin{aligned} \log x &= 2,1411, \\ \log y &= 1,8722; \end{aligned} \quad (\gamma) \quad \begin{aligned} \log x &= 1,8222, \\ \log y &= 2,120. \end{aligned} \quad (\delta)$$

Hieruit volgen deze twee stellen wortels



$$\begin{array}{ll} x = 138,4, & x = 66,4, \\ y = 74,5; & y = 131,8. \end{array}$$

Ook hier is het weer beter de beide kleinste coördinaten, de ordinaat van  $\gamma$  en de abscis van  $\delta$  niet rechtstreeks te meten, maar de overeenkomstige wortels door berekening uit de waarde voor  $x^4 y^5$  af te leiden (iets wat hier gemakkelijk kan gebeuren, omdat de tweede der beide op te lossen vergelijkingen uit twee termen bestaat). De benoodigde logaritmen zijn reeds gevonden.

(γ)	17,8889	17,8889	(δ)
	4 log x = 8,5644	5 log y = 10,6000	
	5 log y = 9,3245	4 log x = 7,2889	
	y = 73,3	x = 66,4	

Deze getallen komen vrij nauwkeurig overeen met de waarden, die de rechtstreeksche meting opleverde.

## NASCHRIFT.

Toen dit stukje gereed was, kreeg ik van Prof. MEMHKE een Sonderabdruck uit het „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, een opstel inhoudende, waarin hij zijn graphisch-logarithmische methode ook op de algemeene vergelijking  $f(x, y) = 0$  uitbreidt, maar langs een meer samengestelden weg, dan ik hier gevolgd heb.

Hij splitst de vergelijking  $f(x, y) = 0$ , evenals vroeger  $f(x) = 0$ , weer in twee deelen, stelt beide  $= z$ , en construeert dan de oppervlakken

$$z = f_1(x, y) \text{ en } z = f_2(x, y)$$

weder stap voor stap, dat is, telt steeds een nieuwe term logaritmisch bij de vorige op, een en ander door additiekrommen en toepassing der beschrijvende Meetkunde.

## VRAAGSTUK N°. 12.

OPGELOST DOOR

### C. KREDIET.

Vier of meer materiële punten trekken elkander aan evenredig met hunne massa's en volgens een gegeven positieve of negatieve macht van den afstand. Men vraagt die punten zóó te plaatsen en zulke beginselsnelheden te geven, dat gedurende de beweging hunne onderlinge afstanden onveranderd blijven.

---

### HOOFDSTUK I.

§ 1. Daar gedurende de beweging de onderlinge afstanden der punten onveranderd moeten blijven, kunnen wij hunne onderlinge plaatsing bepalen door de coördinaten  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$  ten opzichte van een rechthoekig coördinatenstelsel, aan het samenstel van punten verbonden.

Nemen we een vast, rechthoekig coördinatenstelsel in de ruimte en zij  $X_1, Y_1, Z_1$  de plaats, ingenomen door de massa  $m_1$  op het oogenblik  $t$ , terwijl alsdan  $X_0, Y_0, Z_0$  de plaats is, ingenomen door den oorsprong van het beweeglijke assenstelsel; dan hebben we

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_0 + a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ Y_1 &= Y_0 + a' x_1 + b' y_1 + c' z_1, \\ Z_1 &= Z_0 + a'' z_1 + b'' y_1 + c'' z_1, \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

waarin

$X_0, Y_0, Z_0, a, a', a'', b, b', b''$  en  $c, c', c''$ ,  
functiën van  $t$  zijn.

§ 2. De krachten, die op het puntenstelsel werken, zijn twee aan twee gelijk en tegengesteld. Het geheel is dus te beschouwen als niet onderworpen aan uitwendige krachten. In de eerste plaats volgt hieruit: het gemeenschappelijk zwaartepunt der massa's is in rust of in eenparige, rechte lijnige beweging.

Nemen wij aan, dat  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  het gemeenschappelijk zwaartepunt der massa's zij, dan hebben wij, welke ook de wet der aantrekking is,

$$\frac{d^2 X_0}{dt^2} = \frac{d^2 Y_0}{dt^2} = \frac{d^2 Z_0}{dt^2} = 0, \dots \dots \dots (2)$$

§ 3. Wij kunnen, in verband met de formules (2), de beweging splitsen in eene translatie en eene rotatie om een as door het zwaartepunt. Aangezien de translatie geen invloed heeft op de voor de beweging noodige krachten, zullen wij mogen aannemen, dat het gemeenschappelijk zwaartepunt in rust is.

Laten wij nu de bewegelijke assen samenvallen met de hoofdassen van traagheid van het stelsel, en zijn  $A$ ,  $B$  en  $C$  de momenten van inertie ten opzichte dezer assen,  $p$ ,  $q$  en  $r$  de ontbondenen der hoeksnelheid in de richting dezer assen, dan mogen wij als bewezen aannemen

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C) q r, \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A) r p, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B) p q; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

benevens

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = \text{standvastige}, \dots \dots (4)$$

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{standvastige} \dots \dots (5)$$

§ 4. Bepalen wij de versnelling der massa  $m_1$ . Denken wij daartoe de vaste assen voor een oogenblik samenvallende met de beweeglijke, dan is  $X_1 = x_1$ ,  $Y_1 = y_1$  en  $Z_1 = z_1$ . Alsdan is

$$\frac{d X_1}{dt} = q Z_1 - r Y_1,$$

$$\frac{dY_1}{dt} = rX_1 - pZ_1,$$

$$\frac{dZ_1}{dt} = pY_1 - qX_1.$$

Dewijl de ontbondene der hoeksnelheid volgens de vaste  $X$ -as na een tijd  $dt$  is,  $p + dp + qrdt - rqdt$  of  $p + dp$ , hebben we

$$\frac{d^2 X_1}{dt^2} = Z_1 \frac{dq}{dt} - Y_1 \frac{dr}{dt} + q(pY_1 - qX_1) - r(rX_1 - pZ_1), \text{ enz.,}$$

of, in verband met (3),

$$\frac{d^2 X_1}{dt^2} = -X_1(q^2 + r^2) + prZ_1 \left(1 + \frac{C-A}{B}\right) + pqY_1 \left(1 - \frac{A-B}{C}\right),$$

enz. Wij vinden dus voor de versnellingen, evenwijdig aan de beweeglijke coördinaten-assen, de waarden

$$\left. \begin{aligned} & -x_1(q^2 + r^2) + prz_1 \left(1 + \frac{C-A}{B}\right) + pqy_1 \left(1 - \frac{A-B}{C}\right), \\ & -y_1(r^2 + p^2) + pqx_1 \left(1 + \frac{A-B}{C}\right) + qrz_1 \left(1 - \frac{B-C}{A}\right), \\ & -z_1(p^2 + q^2) + qry_1 \left(1 + \frac{B-C}{A}\right) + rpy_1 \left(1 - \frac{C-A}{B}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Deze waarden moeten, in verband met de krachten, die op het puntenstelsel werken, standvastigen zijn.

Uit de betrekkingen (4), (5) en (6) besluiten wij dat  $p$ ,  $q$  en  $r$  standvastig zijn.

§ 5. De mogelijkheid is echter niet uitgesloten, dat de vergelijkingen (4), (5) en (6) onderling afhankelijk zijn. Alleen dan, wanneer  $A = B = C$  is, is (5) afhankelijk van (4). De vergelijkingen (6) en (4) leveren nu

$$\begin{aligned} & -x_1(q^2 + r^2) + prz_1 - pqy_1 = \text{standvastige,} \\ & -y_1(r^2 + p^2) + pqx_1 - qrz_1 = \text{standvastige,} \\ & -z_1(p^2 + q^2) + qry_1 - prx_1 = \text{standvastige,} \\ & p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2 = \text{standvastige;} \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$x_1^2 p^2 + y_1^2 q^2 + z_1^2 r^2 = \text{standvastige.}$$

Eveneens zullen we hebben

$$x_2^2 p^2 + y_2^2 q^2 + z_2^2 r^2 = \text{standvastige,}$$

enz.; waaruit opnieuw volgt, dat  $p$ ,  $q$  en  $r$  standvastig zijn,

tenzij de materiële punten op ééne rechte liggen. Dit laatste strijdt echter met  $A = B = C$ .

Zijn (4) en (5) onderling onafhankelijk, dan mogen we vrijelijk het besluit, aan 't slot der vorige paragraaf genomen, handhaven; want de betrekkingen (6) zijn  $n$  in aantal en herleiden zich tot 3, als de punten op ééne rechte liggen.

§ 6. Uit de standvastigheid van  $p, q$  en  $r$  volgt

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0,$$

en dus, in verband met (3),

$$\left. \begin{aligned} (B - C)qr &= 0, \\ (C - A)rp &= 0, \\ (A - B)pq &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Verschillende gevallen zijn te onderscheiden

1°.  $A = B = C$ . De waarden  $p, q$  en  $r$  blijven onbepaald, doch iedere as is als hoofdas van traagheid aan te nemen, en derhalve de rotatie-as ook.

2°.  $A = B$ , doch niet gelijk  $C$ . Wij hebben  $qr = 0$  en  $rp = 0$  dus  $r = 0$ . De as van rotatie ligt derhalve in het vlak, aangegeven door  $A$  en  $B$ , en is dus als hoofdas van traagheid op te vatten, daar dit 't geval is voor elke as in dit vlak.

3°.  $A, B$  en  $C$  zijn ongelijk. Er zijn dan twee der drie grootheden  $p, q, r$  nul. De rotatie-as is dus hoofdas van traagheid.

Wij komen dus in elk geval tot het besluit

De as van rotatie is een hoofdas van traagheid.

§ 7. Nemen wij de rotatie-as als de  $Z$ -as van het beweeglijke stelsel, dan is  $p = 0, q = 0, r = \omega$ . Voor de versnelingen, evenwijdig aan de beweeglijke assen, vinden wij dan  $-x_1 \omega^2, -y_1 \omega^2$  en  $0$ ; zoodat de totale versnelling is  $-\rho_1 \omega^2$ , wanneer  $\rho_1$  den afstand van  $m_1$  tot de rotatie-as voorstelt.

Hieruit volgt

De krachten, op de materiële punten werkende, zijn de centripetale krachten, noodig voor de rotatie.

§ 8. Daar de rotatie-as standvastig is ten opzichte van het puntenstelsel, is het, in verband met het vorige besluit noodzakelijk, dat de resultanten van de krachten, die op elk der punten werken, evenwijdig zijn aan eenzelfde vlak.

Beschouwt men nu een materiëel punt, dat verder van dit vlak af ligt dan alle andere, dan is het onmogelijk, dat de resultante der aantrekkingen, die dit punt van de overige ondervindt, evenwijdig is aan het bedoelde vlak. Er kan derhalve geen enkel punt verder afgelegen zijn dan de andere, en daarom

Al de materiële punten liggen in één plat vlak, loodrecht op de as van rotatie.

§ 9. Vatten wij de verkregen uitkomsten te zamen, dan besluiten wij, welke ook de wet der aantrekking der materiële punten zij, tot:

Alle materiële punten moeten gelegen zijn in één plat vlak. De resultanten van de krachten, op elk der punten werkende, moeten gaan door het gemeenschappelijk zwaartepunt der massa's, zij zijn evenredig met de massa's, waarop zij aangrijpen, en met den afstand daarvan tot het gemeenschappelijk zwaartepunt.

Aan het vlak mag een willekeurige translatie gegeven worden, benevens eene rotatie om een as, loodrecht op het vlak en door het gemeenschappelijk zwaartepunt der massa's gaande, zoodanig dat de genoemde resultanten de centripetale krachten vormen, noodig voor de rotatie.

---

## HOOFDSTUK II.

§ 1. In het vorige hoofdstuk hebben wij onderzocht, welke beweging aan het puntenstelsel gegeven mag worden. Wij zullen thans nagaan, hoe de materiële punten ten opzichte van elkander in het platte vlak geplaatst moeten worden, opdat

aan de andere voorwaarden, in I, § 9 genoemd, voldaan worde.

Nemen wij in het vlak twee onderling rechthoekige coördinaten-assen, en bepalen wij de plaatsen der materiële punten  $m_1, m_2, \dots m_p$  door de coördinaten  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots x_p, y_p$ . Stellen wij de aantrekking evenredig aan de  $n^{\text{de}}$  macht van den afstand, dan kunnen wij de grootte der krachten berekenen.

Op  $m_1$  werkt, ten gevolge der aanwezigheid van  $m_2$ , een kracht, waarvan de grootte is

$$k_{12} = f m_1 m_2 ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{n}{2}},$$

terwijl de ontbondenen volgens  $x$ - en  $y$ -as worden aangegeven door

$$(x_2 - x_1) \cdot f m_1 m_2 ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

en

$$(y_2 - y_1) \cdot f m_1 m_2 ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

De resultante van de op  $m_1$  werkende krachten heeft derhalve tot ontbondenen

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= f m_1 \sum (x_i - x_1) \cdot m_i ((x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2)^{\frac{n-1}{2}}, \\ Y_1 &= f m_1 \sum (y_i - y_1) \cdot m_i ((x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned} \right\} (1)$$

§ 2. De kracht, door (1) aangegeven, moet gaan door het gemeenschappelijk zwaartepunt der massa's, dat is door het punt  $x_0, y_0$ , als

$$M x_0 = \sum m x,$$

$$M y_0 = \sum m y.$$

Nemen we gemakshalve dit punt als oorsprong, dan voeren wij de betrekkingen in

$$\sum m x = 0, \quad \sum m y = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Wij moeten dus nu hebben

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{x_1}{y_1} \dots \dots \dots (3)$$

§ 3. Is  $\omega$  de hoeksnelheid, dan zullen we voor de ontbondenen der centripetale kracht de waarden  $-m_1 x_1 \omega^2$  en  $-m_1 y_1 \omega^2$  hebben, en daar deze waarden moeten overeenkomen met  $X_1$  en  $Y_1$ , komen we tot de belangrijke vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} f \sum m_i (x_i - x_1) ((x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2)^{\frac{n-3}{2}} + \omega^2 x_1 &= 0, \\ f \sum m_i (y_i - y_1) ((x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2)^{\frac{n-3}{2}} + \omega^2 y_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Uit deze vergelijkingen, waarvan het aantal  $2p$  is, en waarvan (2) en (3) afhankelijk zijn, moeten nu  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , enz. berekend worden. Wij moeten evenwel opmerken, dat het aantal onafhankelijke vergelijkingen kleiner is dan  $2n$ .

§ 4. Is  $n = 1$ , dan worden de vergelijkingen (4)

$$(fM - \omega^2)x_1 = 0, (fM - \omega^2)y_1 = 0 \dots \quad (5)$$

en hieraan wordt voldaan door

$$\omega = \sqrt{fM}; \dots \quad (6)$$

zoodat

Is de aantrekking evenredig met de eerste macht van den afstand, dan is de plaatsing der punten in het platte vlak geheel willekeurig. De hoeksnelheid is dan alleen afhankelijk van de geheele massa der punten.

§ 5. Is  $n - 1$  niet gelijk nul, dan is de oplossing der vergelijkingen (4) zeer ingewikkeld, doch wij kunnen anders handelen. Wij kunnen namelijk uit die vergelijkingen eigenschappen afleiden, waaraan de veelhoek, in welks hoekpunten de materiële punten gelegen zijn, moet voldoen.

Wij merken even op, dat, zoo de veelhoek regelmatig is en de massa's der materiële punten gelijk zijn, de oplossing zich als vanzelf opdringt.

Stellen wij den afstand der punten  $m_1$  en  $m_2$  voor door  $r_{12}$  enzovoort, dan kunnen wij de vergelijkingen (4) schrijven

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{f} x_1 &= m_2 r_{12}^{n-1} (x_1 - x_2) + m_3 r_{13}^{n-1} (x_1 - x_3) + \\ &\quad + m_4 r_{14}^{n-1} (x_1 - x_4) + \dots, \\ \text{en evenzoo} \\ \frac{\omega^2}{f} x_2 &= m_1 r_{12}^{n-1} (x_2 - x_1) + m_3 r_{23}^{n-1} (x_2 - x_3) + \\ &\quad + m_4 r_{24}^{n-1} (x_2 - x_4) + \dots, \\ \text{enz.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Daar wij de richtingen der coördinaten-assen niet bepaald hebben, nemen wij deze een oogenblik evenwijdig aan en



loodrecht op  $r_{12}$ . Hierdoor is dan  $x_1 = x_2$  en bovendien

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} = \frac{Opp. \Delta m_1 m_2 m_3}{Opp. \Delta m_1 m_2 m_4},$$

of

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} = \frac{O_{123}}{O_{124}}.$$

Trekken we nu de twee vergelijkingen (7) van elkander af, dan vinden we onmiddellijk:

$$m_3 O_{123} (r_{13}^{n-1} - r_{23}^{n-1}) + m_4 O_{124} (r_{13}^{n-1} - r_{23}^{n-1}) + \dots = 0 \dots (8)$$

Het aantal dezer vergelijkingen bedraagt  $\frac{1}{2} p(p-1)$ , doch daarbij zijn vele afhankelijke. Bij sommige zullen de grootheden  $O$  als negatief in rekening gebracht moeten worden, namelijk dan, wanneer de lijn, waaraan de  $Y$ -as evenwijdig gedacht wordt, den veelhoek in twee deelen verdeelt. De driehoeken ter eene zijde zijn dan positief, die ter andere negatief te nemen.

Uit de vergelijkingen (8) zijn de massa's  $m_1, m_2, \dots m_p$  te elimineeren, en alsdan blijven er één of meer betrekkingen over, waaraan de veelhoek onafhankelijk van de massa's moet voldoen.

§ 6. De handelwijze in de vorige paragraaf gevolgd is niet toe te passen, als de materiële punten in ééne rechte liggen, daar alsdan alle  $O$ 's nul worden, en de vergelijkingen (8) dan identiek zijn. Dit geval eischt derhalve een afzonderlijke behandeling.

Zijn er slechts twee materiële punten, dan ontstaan er geen vergelijkingen (8). In dit geval is het puntstelsel aan geen enkele voorwaarde gebonden. De oplossing is altijd mogelijk.

Zijn er drie materiële punten, dan leveren de vergelijkingen (8), daar wij  $O_{123}$  niet gelijk nul nemen,

$$r_{12} = r_{23} = r_{13},$$

doch de massa's zijn willekeurig. Deze oplossing voor drie materiële punten is bekend.

§ 7. De vergelijking  $\Sigma m x = 0$  laat zich schrijven

$$M x_1 = m_2 (x_1 - x_2) + m_3 (x_1 - x_3) + m_4 (x_1 - x_4) + \dots \quad (9)$$

Stellen we opnieuw  $x_1 = x_2$ , dan volgt uit (7a) en (9), door deeling

$$\frac{\omega^2}{fM} = \frac{m_3 O_{123} \cdot r_{13}^{n-1} + m_4 O_{124} r_{14}^{n-1} + \dots}{m_3 O_{123} + m_4 O_{124} + \dots} \dots (10)$$

waarin, even als in (8), negatieve  $O$ 's kunnen voorkomen.

Voor drie materiële punten, gelegen in de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek met zijde  $= a$ , volgt hieruit voor hoeksnelheid

$$\omega = \sqrt{fM \cdot a^{n-1}}.$$

§ 8. In de vorige paragrafen is feitelijk de algemeene oplossing voor het vraagstuk gegeven. Wij zullen haar nader gaan uitwerken voor vier materiële punten. Wij zullen aannemen dat  $r_{13}$  en  $r_{24}$  de diagonalen zijn, en komen dan door (8) tot de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} m_1 O_2 (r_{13}^{n-1} - r_{14}^{n-1}) + m_2 O_1 (r_{23}^{n-1} - r_{24}^{n-1}) &= 0, \\ m_2 O_3 (r_{24}^{n-1} - r_{12}^{n-1}) + m_3 O_2 (r_{34}^{n-1} - r_{13}^{n-1}) &= 0, \\ m_3 O_4 (r_{13}^{n-1} - r_{23}^{n-1}) + m_4 O_3 (r_{14}^{n-1} - r_{24}^{n-1}) &= 0, \\ m_4 O_1 (r_{24}^{n-1} - r_{34}^{n-1}) + m_1 O_4 (r_{12}^{n-1} - r_{13}^{n-1}) &= 0, \\ m_1 O_3 (r_{12}^{n-1} - r_{14}^{n-1}) - m_3 O_1 (r_{23}^{n-1} - r_{34}^{n-1}) &= 0, \\ m_2 O_4 (r_{12}^{n-1} - r_{23}^{n-1}) - m_4 O_2 (r_{14}^{n-1} - r_{34}^{n-1}) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Van deze vergelijkingen zijn er twee afhankelijk van de vier overige. Wij vinden uit (10)

$$\frac{\omega^2}{fM} = \frac{m_3 r_{13}^{n-1} O_4 + m_4 r_{14}^{n-1} O_3}{m_3 O_4 + m_4 O_3},$$

en dus in verband met de derde vergelijking (11), na een kleine herleiding,

$$\frac{\omega^2}{fM} = \frac{r_{14}^{n-1} r_{23}^{n-1} - r_{13}^{n-1} r_{24}^{n-1}}{(r_{14}^{n-1} + r_{23}^{n-1}) - (r_{13}^{n-1} + r_{24}^{n-1})} \dots (12)$$

§ 9. Uit de vergelijkingen (11a), (11b) en (11e) volgt

$$\begin{aligned} (r_{13}^{n-1} - r_{14}^{n-1}) (r_{24}^{n-1} - r_{12}^{n-1}) (r_{23}^{n-1} - r_{34}^{n-1}) &= \\ = (r_{23}^{n-1} - r_{24}^{n-1}) (r_{34}^{n-1} - r_{13}^{n-1}) (r_{12}^{n-1} - r_{14}^{n-1}), \end{aligned} \quad (13)$$

en dit geeft na herleiding de betrekking

$$\begin{vmatrix} 1, & r_{12}^{n-1} + r_{34}^{n-1}, & r_{12}^{n-1} \cdot r_{34}^{n-1}, \\ 1, & r_{13}^{n-1} + r_{24}^{n-1}, & r_{13}^{n-1} \cdot r_{24}^{n-1}, \\ 1, & r_{14}^{n-1} + r_{23}^{n-1}, & r_{14}^{n-1} \cdot r_{23}^{n-1}, \end{vmatrix} = 0 \dots (14)$$

Aan deze betrekking moet de vierhoek voldoen, wil een antwoord op de vraag mogelijk zijn. Heeft men een vierhoek, welke aan (14) voldoet, dan kan men de verhouding der massa's uit (11) en de hoeksnelheid uit (12) bepalen, daarbij lettende op de teekens der  $O$ 's, als de vierhoek niet convex is. In verband met (14) verandert (12) niet, als we behoorlijk permuteeren, en daar dit à priori is op te maken, zouden wij (14) uit (12) hebben kunnen afleiden.

De determinant wordt, bij deeling der rijen door de grootheden der laatste kolom, in zooverre veranderd, dat  $n - 1$  door  $1 - n$  vervangen moet worden. Een vierhoek, welke voor zekere waarde van  $n$  voldoet, voldoet dus ook voor de waarde  $2 - n$ .

§ 10. Zij bijvoorbeeld  $n = -1$  of  $n = 3$ , dan zullen we  $c$  met behulp van (14) uit  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  en  $\beta$  (zie fig. 1) kunnen bepalen. Wij hebben dan

$$0 = \begin{vmatrix} 1, & a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, & a^2(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha), \\ 1, & a^2 + b^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, & b^2(a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta), \\ 1, & a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \gamma, & c^2(a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma). \end{vmatrix}$$

Trekken we  $a^2 + b^2 + c^2$  van de grootheden der tweede en  $a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$  van die der derde kolom af, dan hebben we

$$0 = \begin{vmatrix} 1, & 2bc \cos \alpha, & bc(bc + 2a^2 \cos \alpha), \\ 1, & 2ac \cos \beta, & ac(ac + 2b^2 \cos \beta), \\ 1, & 2ab \cos \gamma, & ab(ab + 2c^2 \cos \gamma). \end{vmatrix}$$

of ook

$$\begin{vmatrix} a, & \cos \alpha, & bc + 2a^2 \cos \alpha, \\ b, & \cos \beta, & ca + 2b^2 \cos \beta, \\ c, & \cos \gamma, & ab + 2c^2 \cos \gamma. \end{vmatrix} = 0.$$

Deze vergelijking is ten opzichte van  $c$  van den tweeden graad en geeft derhalve hoogstens twee waarden.

§ 11. Vergelijking (13) stelt ons in staat na te gaan, welke

vierhoeken, onafhankelijk van de waarde van  $n$ , aan de vraag kunnen voldoen.

Nemen wij bijvoorbeeld  $r_{23} = r_{24}$ , dan hebben wij tevens één der drie gelijkheden

$$r_{13} = r_{14}, \quad r_{12} = r_{24} \quad \text{of} \quad r_{34} = r_{23},$$

dat is

1<sup>o</sup>. De vierhoek is een deltoïd.

2<sup>o</sup>. Het vierde hoekpunt is het middelpunt van den omgeschreven cirkel des driehoeks, bepaald door de drie andere punten.

3<sup>o</sup>. Drie der hoekpunten vormen die van een gelijkzijdigen driehoek.

§ 12. Zij  $m_1 m_2 m_3 m_4$  (fig. 2) de deltoïd, dan is  $O_1 = O_3$ , en wij hebben in verband met (11)  $m_1 = m_3$ . Tevens is dan

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{r_{23}^{n-1} - r_{24}^{n-1}}{r_{13}^{n-1} - r_{14}^{n-1}}, \quad \frac{m_1}{m_4} = -\frac{O_1}{O_4} \cdot \frac{r_{12}^{n-1} - r_{13}^{n-1}}{r_{24}^{n-1} - r_{34}^{n-1}}.$$

Daar de massa's positief moeten zijn, vinden we

$(r_{23} - r_{24})(r_{13} - r_{14}) < 0$  en  $(r_{12} - r_{13})(r_{24} - r_{34}) < 0$ ,  
of wel

$$\{ \sec \alpha - (t g \alpha + t g \beta) \} (2 - \sec \beta) < 0, \\ (\sec \alpha - 2)(t g \alpha + t g \beta - \sec \beta) < 0,$$

waarin  $\alpha$  en  $\beta$  beide scherp. Dit geeft

$$(\cos \beta - \sin(\alpha + \beta))(2 \cos \beta - 1) < 0, \\ (\cos \alpha - \sin(\alpha + \beta))(2 \cos \alpha - 1) < 0,$$

waaruit

$$\alpha < 60^\circ \quad \text{en} \quad \beta < 60^\circ,$$

en dus ook

$$\sin(\alpha + \beta) > \cos \beta \quad \text{en} \quad > \cos \alpha,$$

of

$$\alpha + \beta > 90 - \beta \quad \text{en} \quad > 90 - \alpha,$$

dus

$$\alpha + \beta > 60^\circ, \quad \alpha > 15^\circ \quad \text{en} \quad \beta > 15^\circ.$$

De hoeken des deltoïds zijn dus allen grooter dan  $60^\circ$ .

Is de vierhoek een ruit, dan zijn derhalve de diagonalen langer dan de zijden. Tevens is dan  $m_2 = m_4$ .

§ 13. Is de vierhoek zoodanig, als sub. 2° van § 11 genoemd werd, en is  $O_1$  de inhoud des driehoeks, waarom de cirkel beschreven kan worden uit  $m_1$  als middelpunt en  $r_{12}$  als straal, dan is in verband met (11)

$$m_2 O_1 (r_{23}^{n-1} - r_{24}^{n-1}) = 0,$$

$$m_3 O_1 (r_{34}^{n-1} - r_{23}^{n-1}) = 0,$$

$$m_4 O_1 (r_{24}^{n-1} - r_{34}^{n-1}) = 0.$$

Daar nu  $O_1$  onmogelijk nul is en twee der massa's  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  evenmin, hebben we noodzakelijk

$$r_{23} = r_{34} = r_{24},$$

zoodat  $\triangle m_2 m_3 m_4$  gelijkzijdig is.

Wij hebben dan tevens  $m_2 = m_3 = m_4$  en  $m_1 =$  willekeurig.

§ 14. Is  $r_{12} = r_{23} = r_{13}$ , dus voldoet de vierhoek aan het genoemde sub 3°. § 11, dan vinden we

$$m_4 O_2 (r_{14}^{n-1} - r_{34}^{n-1}) = 0,$$

$$m_4 O_3 (r_{24}^{n-1} - r_{14}^{n-1}) = 0,$$

$$m_1 O_4 (r_{34}^{n-1} - r_{24}^{n-1}) = 0.$$

Hieraan kan voldaan worden door  $m_4 = 0$ , waardoor wij op de reeds in § 6 genoemde oplossing voor drie punten terug komen. Is  $m_4$  niet nul, dan is

$$r_{14} = r_{24} = r_{34},$$

en wij vinden de oplossing der vorige paragraaf.

De waarde van  $\frac{\omega^2}{fM}$  wordt volgens (12) onbepaald, doch volgens de aan (12) voorafgaande waarde wordt

$$\omega^2 = f(m_1 + m_2 + m_3 + 3^{\frac{1-n}{2}} \cdot m_4) a^{n-1},$$

als  $r_{12} = a$  is.

§ 15. Gaan wij nog een paar bijzondere gevallen na. De determinant (14) wordt nul voor

$$r_{12}^{n-1} + r_{34}^{n-1} = r_{13}^{n-1} + r_{24}^{n-1} = r_{14}^{n-1} + r_{23}^{n-1}.$$

Daar echter  $\frac{\omega^2}{fM}$  niet oneindig groot kan wezen, moeten wij tevens hebben

$$r_{12}^{n-1} \cdot r_{34}^{n-1} = r_{13}^{n-1} \cdot r_{24}^{n-1} = r_{14}^{n-1} \cdot r_{23}^{n-1},$$

en dus is dan de vierhoek zooals in de §§ 13 en 14 besprokene.

§ 16. Evenzoo is de determinant nul voor

$$\frac{r_{12}^{n-1} \cdot r_{34}^{n-1}}{r_{12}^{n-1} + r_{34}^{n-1}} = \frac{r_{13}^{n-1} \cdot r_{24}^{n-1}}{r_{13}^{n-1} + r_{24}^{n-1}} = \frac{r_{14}^{n-1} \cdot r_{23}^{n-1}}{r_{14}^{n-1} + r_{23}^{n-1}}.$$

Ieder dezer breuken is dan gelijk aan  $\frac{\omega^2}{fM}$ .

Is bijvoorbeeld  $n = -1$ , dan vinden we

$$r_{12}^2 + r_{34}^2 = r_{13}^2 + r_{24}^2 = r_{14}^2 + r_{23}^2 = \frac{fM}{\omega^2}.$$

Is nu  $m_1 m_2 m_3$  een willekeurige driehoek, en  $m_4$  het snijpunt der hoogtelijnen, dan is deze betrekking juist, en wij hebben, als  $R$  de straal des omgeschreven cirkels van  $\triangle m_1 m_2 m_3$  is,

$$\omega = 2R \sqrt{fM}.$$

§ 17. Door gelijkstelling van twee rijen van den determinant (14) komen we steeds op den deltoïd terug. Wij kunnen daardoor dus geen andere bijzondere gevallen verkrijgen.

Liggen drie der punten op ééne rechte, hetgeen zich zal voordoen als  $O_4 = 0$  is, dan geeft (11)

$$m_4 O_2 (r_{34}^{n-1} - r_{14}^{n-1}) = 0,$$

$$m_4 O_1 (r_{24}^{n-1} - r_{34}^{n-1}) = 0,$$

$$m_4 O_3 (r_{14}^{n-1} - r_{24}^{n-1}) = 0,$$

en dus  $m_4 = 0$  of  $r_{14} = r_{24} = r_{34}$ . Dit laatste kan niet, dus  $m_4 = 0$ . Dit geval is reeds aangegeven.

§ 18. Liggen alle punten op ééne rechte, dan zijn de vergelijkingen (7) en (9) te vervangen door

$$\frac{\omega^2}{f} r_1 = m_2 r_{12}^n + m_3 r_{13}^n + m_4 r_{14}^n + \dots,$$

$$M r_1 = m_2 r_{12} + m_3 r_{13} + m_4 r_{14} + \dots,$$

waarin  $r_1$  de afstand van  $m_1$  tot het gemeenschappelijk zwaarte-

punt. De teekens kunnen echter ook negatief zijn, en wel wordt een afstand in deze of gene zin gemeten, dan is het teeken positief of negatief. Zoo is voor vier punten  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , die elkander aldus opvolgen,

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{fM} &= \frac{m_2 r_{12}^n + m_3 r_{13}^n + m_4 r_{14}^n}{m_2 r_{12} + m_3 r_{13} + m_4 r_{14}} = \frac{-m_1 r_{12}^n + m_3 r_{23}^n + m_4 r_{24}^n}{-m_1 r_{12} + m_3 r_{23} + m_4 r_{24}} = \\ &= \frac{-m_1 r_{13}^n - m_2 r_{23}^n + m_4 r_{34}^n}{-m_1 r_{13} - m_2 r_{23} + m_4 r_{34}} = \frac{-m_1 r_{14}^n - m_2 r_{24}^n - m_3 r_{34}^n}{-m_1 r_{14} - m_2 r_{24} - m_3 r_{34}}. \end{aligned}$$

Deze laatste breuk volgt uit de gelijkheid der drie andere. Er zijn derhalve slechts twee grootheden te bepalen, waarvoor men gemakshalve twee der massa's kan nemen.

Men kan  $\frac{\omega^2}{fM}$  ook bepalen uit

$$\begin{vmatrix} 0, & r_{12} \left( r_{12}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & r_{13} \left( r_{13}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & r_{14} \left( r_{14}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), \\ -r_{12} \left( r_{12}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & 0, & r_{23} \left( r_{23}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & r_{24} \left( r_{24}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), \\ -r_{13} \left( r_{13}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & -r_{23} \left( r_{23}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & 0, & r_{34} \left( r_{34}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), \\ -r_{14} \left( r_{14}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & -r_{24} \left( r_{24}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & -r_{34} \left( r_{34}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right), & 0. \end{vmatrix} = 0,$$

dat is

$$r_{12} r_{34} \left( r_{12}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right) \left( r_{34}^{n-1} - \frac{\omega^2}{fM} \right) + \dots = 0.$$


---

# OVER ZELF-WEDERKEERIGE POOLKROMMEN,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

---

De hier volgende bijdrage werd door mij voor de vergadering van 3 April 1891 der subsectie voor wiskunde van de sectie natuur- en scheikunde van het te Utrecht gehouden derde Nederlandsch natuur- en geneeskundig congres ingezonden, daar ik verhinderd was, die bijdrage alstoen persoonlijk voor te dragen.

In verband met den bij die gelegenheid beschikbaren tijd had daarop de Heer P. VAN MOURIK de welwillendheid mondeling een overzicht daarvan te geven, dat onlangs in de Handelingen van voornoemd congres werd afgedrukt.

Om echter meer van nabij enkele bijzonderheden der gevolgde berekening te doen kennen, is het niet ondoelmatig voorgekomen de oorspronkelijke bijdrage thans alsnog in haar geheel te dezer plaatse op te nemen.

---

Indien van eene stekkundige vlakke kromme de graad genoemd wordt  $\mu$ , de klasse  $\nu$ , het aantal dubbelpunten  $\delta$ , dat der dubbelraaklijnen  $\tau$ , dat der keerpunten  $\kappa$  en dat der buigraaklijnen  $\iota$ , dan gelden volgens PLÜCKER tusschen deze getallen de volgende betrekkingen, onder den vorm, waarin CAYLEY ze door het invoeren van eene hulpgrootheid  $\alpha$  ge-



bracht heeft, namelijk  $2\delta = \mu^2 - \mu + 8\nu - 3\alpha$ ,  $2\tau = \nu^2 - \nu + 8\mu - 3\alpha$ ,  $\kappa = \alpha - 3\nu$ ,  $\iota = \alpha - 3\mu$ ; terwijl dan bovendien het zoogenaamde geslacht of defect, zoowel van de kromme zelve als van hare wederkeerige poolkromme, is  $D = \frac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - 2) - \delta - \kappa = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \tau - \iota = \frac{\alpha}{2} - \mu - \nu + 1$ . In al die gevallen dus, waarin  $\mu = \nu$  is, blijkt ook  $\delta = \tau$  en  $\kappa = \iota$  te zijn, en kan men,  $\alpha$  elimineerende, schrijven  $\delta = \tau = \frac{1}{2}(\mu - 2)(\mu - 3) - 3D$  en  $\kappa = \iota = (\mu - 2) + 2D$ . Voor  $\mu = \nu = 2$  of 3 of 4 bij voorbeeld komt hier, om  $\delta = \tau$  niet negatief te maken, alleen  $D = 0$  in aanmerking, en heeft men  $\mu = \nu = 2$ ,  $\delta = \tau = 0$ ,  $\kappa = \iota = 0$ ; of  $\mu = \nu = 3$ ,  $\delta = \tau = 0$ ,  $\kappa = \iota = 1$ ; of  $\mu = \nu = 4$ ,  $\delta = \tau = 1$ ,  $\kappa = \iota = 2$ ; terwijl daarentegen voor hooger graad en klasse ook het geslacht der krommen van de hier bedoelde soort, wier kenmerkende getallen namelijk dezelfde zijn als van hare poolkrommen, gelijk aan of grooter dan de eenheid zou kunnen wezen.

Tot mijn leedwezen ben ik niet wel in de gelegenheid geweest na te gaan, of reeds ergens een algemeen onderzoek omtrent dergelijke krommen — waarbij de gelijkheid der kenmerkende getallen toch nog niet noodwendig den ook overigens gelijken aard der beide wederkeerige krommen schijnt met zich te brengen — werd ingesteld. Maar wel trok het mijne aandacht, dat op blz. 90, 4<sup>e</sup> voorbeeld, van SALMON-FIEDLER's *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 2<sup>e</sup> Auflage, 1882, mijns inziens ten onrechte als zulk eene kromme wordt opgegeven de omhullende der gemeenschappelijke koorden van eene kegelsnede  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  met hare opvolgende kromtecirkels, namelijk de kromme  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4\right)^3 + 27\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = 0$ , waarvoor aldaar gezegd wordt  $\mu = \nu = 6$ ,  $\delta = \tau = 6$ ,  $\kappa = \iota = 4$  te zijn. Bedrieg ik mij toch niet, dan heeft deze kromme ten opzichte van den rechtecirkel  $x^2 + y^2 = A^2$  tot poolkromme  $(a^2 x^2 - b^2 y^2)^2 - A^4(a^2 x^2 + b^2 y^2) = 0$  [bij voorbeeld in het geval der elijkzijdige hyperbool,

$b^2 = -a^2$ , de gewone lemniscaat  $a^2(x^2 + y^2)^2 - A^4(x^2 - y^2) = 0$ , die tevens niet anders is dan de omgekeerde kromme (volgens wederkeerige voerstralen ten opzichte van genoemden richtcirkel) van deze hyperbool  $x^2 - y^2 = a^2$  zelve, of ook de voetpuntskromme van de gelijkzijdige hyperbool  $x^2 - y^2 = \frac{A^4}{a^2}$ ;

zoodat bij SALMON-FIEDLER de kenmerkende getallen moeten zijn  $\mu = 6$ ,  $\nu = 4$ ,  $\delta = 4$ ,  $\tau = 3$ ,  $\kappa = 6$ ,  $\iota = 0$ , en daarmede  $\alpha = 18$ ,  $D = 0$ .

[De hoogleeraar Dr. P. H. SCHOUTE deed mij ten deze nog opmerken, dat uit overeenbrenging van de vergelijking der

hier bedoelde koorde, namelijk  $\frac{x}{a} \cos \alpha - \frac{y}{b} \sin \alpha = \cos 2\alpha$ ,

met  $ux + vy + 1 = 0$  volgt  $u = -\frac{\cos \alpha}{a \cos 2\alpha}$ ,  $v = \frac{\sin \alpha}{b \cos 2\alpha}$ ,

en dat men dus door eliminatie van  $\alpha$  voor de tangentiaal-vergelijking der omhullende vindt  $(a^2u^2 - b^2v^2)^2 = a^2u^2 + b^2v^2$ , waardoor werkelijk de vierde klasse van deze omhullende bevestigd wordt.]

Zooals gezegd, zou men als bijzonder geval van de boven bedoelde krommen kunnen onderzoeken diegenen, waarvoor niet alleen de kenmerkende getallen bij de poolkrommen onveranderd blijven, maar die ook overigens gelijksoortig met hare poolkrommen zijn en zich dus van dezen alleen onderscheiden door andere waarden van de standvastigen in beider overigens — hetzij dan op dezelfde of op verschillende coördinaten-assen — gemeenschappelijke vergelijking. Op grond van het projectivisch karakter van poolkrommen in het algemeen, zou men bij een dergelijk onderzoek in hoofdzaak kunnen volstaan met het aannemen van een cirkel als richtkromme. En dit is ook het geval, indien men, nog een stap verder gaande, zou verlangen, dat de oorspronkelijke kromme juist met hare poolkromme zelve samenvalt; als wanneer — omdat, bij een richtcirkel, voor twee wederkeerige poolkrommen de omgekeerde of ook de voetpuntskromme van ieder tevens voetpuntskromme of ook omgekeerde van de andere is — iedere kromme van deze laatstbedoelde of zelf-wederkeerige soort tevens gekenmerkt is, doordien zij eene gemeen-

schappelijke omgekeerde en voetpuntskromme moet opleveren.

Voor den rechtecirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  moeten twee overeenkomstige punten  $(x, y)$  en  $(x', y')$  van twee wederkeerige poolkrommen voldoen, vooreerst aan  $xx' + yy' = a^2$ , ten andere aan  $xdx' + ydy' = 0$  en  $x'dx + y'dy = 0$ ; de som van welke beide laatste wederkeerige betrekkingen trouwens de differentiaal van de eerste teruggeeft. Hieruit volgt bij voorbeeld

$\frac{x'}{dy} = \frac{y'}{-dx} = \frac{a^2}{xdy - ydx}$ ; of ook, als men de differentiaalvergelijking van de eerste kromme voorstelt door  $Pdx + Qdy = 0$  en nog de notatie  $R = xP + yQ$  invoert,  $\frac{x'}{P} = \frac{y'}{Q} = \frac{a^2}{R}$ . Tot op zekere hoogte kunnen nu deze een-

voudige formules reeds dienen om te beproeven, of eene kromme van eene aangenomen soort tot de zelf-wederkeerige kan behooren; en zoo ja, onder welke omstandigheden. Neem als voorbeeld hiervan de algemeene parabolische kromme  $y^m = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Ix^2 + Kx + L$ ; hier is  $P = nAx^{n-1} + (n-1)Bx^{n-2} + \dots + 2Ix + K$ ,  $Q = -my^{m-1}$ , dus  $R = (n-m)Ax^n + (n-m-1)Bx^{n-1} + \dots - (m-2)Ix^2 - (m-1)Kx - mL$ . Zal nu de poolkromme  $(x', y')$  met deze kromme  $(x, y)$  zelve samenvallen, dan moet de aangenomen vergelijking eene gelijktijdige vervanging van  $x$  door

$x' = a^2 \frac{P}{R}$  en van  $y$  door  $y' = a^2 \frac{Q}{R}$  toelaten; dat is, substitueerende

$(a^2 Q)^m = (-ma^2)^m (y^m)^{m-1}$ , moet  $Aa^{2m}P^m + Ba^{2(n-1)}P^{n-1}R + \dots + Ia^4P^2R^{n-2} + Ka^2PR^{n-1} + LR^m - (-ma^2)^m R^{n-m}(Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Ix^2 + Kx + L)^{m-1} = 0$  zich bij substitutie van  $P$  en  $R$  tot eene identiteit herleiden. Dit vordert vooreerst, dat de coëfficiënt van den enkelen, en wel in  $LR^m$  vervatten, hoogsten term  $x^n$ , namelijk de coëfficiënt  $L((n-m)A)^m$ , gelijk nul zij, hetgeen — als de voorgestelde kromme werkelijk in  $x$  tot den  $n^{\text{den}}$  graad zal opklimmen en dus  $A$  niet  $= 0$  is, en het straks te onderzoeken bijzondere geval  $m = n$  voorloopig daarlatende — vereischt  $L = 0$ . Maar dan verdwijnt in de vorenstaande identiteit de geheele term  $LR^m$  en juist daardoor behoudt zij slechts één term van den alsdan hoogsten graad

$(n^2 - 1)$  in  $x$ , wiens coëfficiënt  $K a^2 (n A) ((n - m) A)^{n-1}$  weder gelijk nul moet zijn, en dus  $K = 0$  doet kennen. Zoo voortgaande blijken alle coëfficiënten  $L$ ,  $K$ ,  $I$  enz. tot en met  $B$  gelijk nul te moeten wezen, en derhalve in het algemeen geene andere parabolische krommen dan  $y^n = A x^n$  tot de zelf-wederkeerige te kunnen behooren. Maar alvorens deze nu nader te bepalen, keeren wij eerst ter zake van deze laatste vergelijking een oogenblik terug tot de wat algemeener beschouwing van de boven reeds vermelde, niet samenvallende, maar toch onderling gelijksoortige, poolkrommen. Die vergelijking toch geeft  $P = n A x^{n-1}$ ,  $Q = -m y^{n-1}$ ,

$$R = (n - m) A x^n = (n - m) y^n, \quad x' = \frac{n a^2}{(n - m) x}, \quad y' = -\frac{m a^2}{(n - m) y},$$

en dus, bij eliminatie van  $x$  en  $y$ , de werkelijk gelijksoortige poolkromme  $y^n = A' x^n$ , waarvoor namelijk

$$A A' = \frac{(-m)^n (n - m)^{n-m}}{n^n a^{2(n-m)}} \text{ blijkt te zijn. En hierin is, door}$$

$A' = A$  te vorderen en dus aan  $A^2$  deze laatstgevonden waarde te geven, tevens het geval van de zelf-wederkeerige kromme  $y^n = A x^n$  vervat. Op te merken valt nog dat — terwijl blijkens  $x x' + y y' = a^2$ , bij elk paar wederkeerige poolkrommen van willekeurigen aard de som der beide symmetrische producten  $x x'$  en  $y y'$  steeds standvastig moet zijn — bij geene andere wederkeerige poolkrommen dan de even gevonden parabolische gelijksoortige, ieder dier producten op zich zelf standvastig blijft; immers, de standvastigheid der verhouding  $\frac{x x'}{y y'}$ , dat is van  $-\frac{x dy}{y dx}$ , voert door integratie dadelijk tot een vorm zooals  $y^n = A x^n$ .

[De hoogleeraar Dr. D. J. KORTEWEG deelde mij ten aanzien der krommen van den derden graad nog het volgende mede:

»Ondertusschen is het mij opgevallen, dat uw opstel ook over de krommen van den derden graad alle uitsluitel geeft, dat men wenschen kan. Onder de zelf-wederkeerige krommen vind ik immers de beide derde-graads-krommen  $y^2 = A_1 x^3$  en  $y = A_2 x^3$ . Voor  $A$  kan men, door eene keuze van  $a$  te doen, krijgen wat men wil. Nu zijn, zooals bekend is, alle

derde-graads-krommen de perspectieven van ééne der krommen  $y^2 = A_1 (x - a)(x - b)(x - c)$ . Van deze kunnen alleen die, voor welke  $a = b = c$  is, zelf-wederkeerig zijn, omdat dit de eenige zijn, die één keerpunt en één buigpunt vertoonen. Deze zijn identiek met  $y^2 = A_1 x^3$ . Zij zijn dus ook allen zelf-wederkeerig, evenals hunne perspectieven. Hieruit volgt dus, dat voor de krommen van den derden graad, die, wier klasse gelijk is aan hun graad, allen zelf-wederkeerig zijn. Door projectivische vervorming kan men ze naar verkiezing de gedaante  $y^2 = A_1 x^3$  of  $y = A_2 x^3$  doen aannemen. In het eene geval is het keerpunt de oorsprong, het buigpunt een oneigenlijk punt; in het tweede geval omgekeerd. Buigpunt en keerpunt zijn voorts, als ik mij niet vergis, overeenkomstige punten.”]

Overgaande tot het reeds boven aangeduide uitzonderingsgeval  $m = n$ , bepalen wij ons tot  $m = n = 2$  en gaan daarbij uit van den vorm  $y^2 = A x^2 + 2 B a x + C a^2$ . Dan is

$$x' = a^2 \frac{P}{R} = - \frac{a(Ax + Ba)}{Bx + Ca} \text{ en } y' = a^2 \frac{Q}{R} = \frac{ay}{Bx + Ca},$$

zoodat, deze waarden in den aangenomen vorm in de plaats stellende van  $x$  en  $y$ , voor de zelf-wederkeerige kegelsnede van dezen aard identisch  $A(Ax + Ba)^2 - 2B(Ax + Ba) \cdot (Bx + Ca) + C(Bx + Ca)^2 - (Ax^2 + 2Bax + Ca^2) = 0$  moet zijn, hetgeen vordert  $A^3 - 2AB^2 + B^2C - A = 0$ ,  $B(A^2 - B^2 - AC + C^2 - 1) = 0$  en  $AB^2 - 2B^2C + C^3 - C = 0$ . Hieraan is te voldoen, hetzij door de drie voorwaarden  $B = 0$  met  $A(A^2 - 1) = 0$  en  $C(C^2 - 1) = 0$ , hetzij door de twee voorwaarden  $A^2 - B^2 - AC + C^2 - 1 = 0$  en  $(B^2 - AC) \cdot (A - C) = 0$ , dat is, óf  $B^2 = AC$  met  $(A - C)^2 = 1$ , óf  $B^2 = A^2 - 1$  met  $C = A$ . Zoodoende komt men in het geheel tot de volgende oplossingen: 1<sup>o</sup>.  $y^2 = 0$ , die echter,  $x' = 0$ ,  $y' = \infty$  gevende, oneigenlijk is; 2<sup>o</sup>.  $y^2 = \pm x^2$ , oneigenlijk wegens  $x'^2 = \pm y'^2 = \infty$ ; 3<sup>o</sup>.  $y^2 = \pm a^2$ , dat zijn twee evenwijdige raaklijnen aan den richtcirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  of aan de gelijkzijdige hyperbool  $x^2 - y^2 = a^2$ ; 4<sup>o</sup>.  $y^2 = \pm x^2 \pm a^2$ , dat zijn de richtcirkel zelf, de onbestaanbare cirkel  $x^2 + y^2 = -a^2$ , en de aan deze beide cirkels dubbel-rakende twee gelijkzijdige hyperbolen  $x^2 - y^2 = \pm a^2$  (die trouwens ook als zelf-weder-

keerige krommen, voor  $m = -\frac{m}{m+1} = -2$ , begrepen zijn in de opmerking bij SALMON-FIEDLER, blz. 101—102, dat namelijk voor polaire coördinaten de wederkeerige poolkromme van  $\rho^n = a^n \cos m \omega$  deze zelfde vergelijking heeft, behoudens vervanging van  $m$  door  $-\frac{m}{m+1}$ ; terwijl zij ook door den

Heer W. MANTEL als zoodanig vermeld worden op blz. 382 der Wiskundige Opgaven van het Wiskundig Genootschap, 4<sup>e</sup> deel, 6<sup>e</sup> stuk, 1890, N<sup>o</sup>. 156); verder 5<sup>o</sup>.  $y^2 = \{x \sqrt{A \pm \pm \sqrt{(A \pm 1)}}\}^2$ , dat zijn een paar raaklijnen, hetzij aan den cirkel of aan de hyperbool  $x^2 \pm y^2 = a^2$  (en waarin dus weder de 2<sup>e</sup> en 3<sup>e</sup> gevallen begrepen zijn); eindelijk 6<sup>o</sup>. — en daarom is het hier voornamelijk te doen — voerende de notatie

$A = C = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$  en  $B = \sqrt{(A^2 - 1)} = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}$  in (alwaar  $b$  naar verkiezing positief of negatief kan zijn), de kegelsnede  $(a^2 + b^2)x^2 - 4a^2bx + a^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)y^2 = 0$  of  $a^2(x - b)^2 + (bx - a^2)^2 - (a^2 - b^2)y^2 = 0$  (voor  $b^2 < a^2$  eene hyperbool, voor  $b^2 > a^2$  eene onbestaanbare ellips, voor  $b^2 = -a^2$  de onbestaanbare parabool  $y^2 = \mp 2a\sqrt{-1}x$ , welke laatste trouwens reeds in het boven behandelde algemeene geval  $y^n = Ax^m$  voor  $m=2$ ,  $n=1$ , dus aldaar  $A^2 = -(2a)^2$ , vervat is), en welke kegelsnede onder de vormen  $-(a^2 - b^2) \cdot (x^2 + y^2 - a^2) + 2a^2(x - b)^2 = 0$  en  $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2 - a^2) + 2(bx - a^2)^2 = 0$  blijkt, wat ook  $b$  zij, steeds met den richtcirkel  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$  eene dubbele raking volgens de raakkoorde  $x = b$ , en met de hyperbool  $x^2 - y^2 - a^2 = 0$  eene dubbele raking volgens de toegevoegde of wederkeerige raakkoorde  $x = \frac{a^2}{b}$  te hebben; terwijl bovendien de beschou-

wing telkens van de genoemde veranderlijke kegelsnede, vasten cirkel en vaste hyperbool eigenaardig wordt aangevuld door de bijkomende veranderlijke kegelsnede  $a^2(x - b)^2 + (bx - a^2)^2 + (a^2 - b^2)y^2 = 0$ , die, hetzij door  $b$  en  $\frac{a^2}{b}$ , hetzij door  $y^2$  en  $-y^2$  te verwisselen, uit de oorspronkelijke voortkomt, dus vooreerst eveneens tot de zelf-wederkeerige

behoort, maar nu integendeel den richtcirkel volgens  $x = \frac{a^2}{b}$

en de hyperbool volgens  $x = b$  dubbel raakt, en ten andere tevens met de oorspronkelijke kegelsnede eene dubbele raking heeft volgens de ook aan cirkel en hyperbool gemeene raakkoorde  $y = 0$ .

Deze bijkomende kegelsnede verkrijgt vooral beteekenis, indien wij er thans toe overgaan de hier gevonden op een richtcirkel betrekkelijke uitkomsten perspectivisch tot eene willekeurige kegelsnede als richtkromme uit te strekken. Maar alvorens een paar opmerkingen. Vooreerst déze, dat geene andere kegelsneden tot de zelf-wederkeerige kunnen behoo- ren, dan die wij zodoende zullen vinden. Want, wel is waar ontbreekt in de boven onderzochte vergelijking  $y^2 = Ax^2 + 2Bax + Ca^2$  zoowel de term in  $xy$  als de term in  $y$ ; maar de eerste dezer termen kan zoo noodig steeds door eene behoorlijke, in ieder geval op de vergelijking van den richtcirkel zonder invloed blijvende, wenteling der coördina- ten-assen verdreven worden; en wat den tweeden term be- treft, indien men, het eerste lid  $y^2$  aanvullende tot  $y^2 + 2B'ay$ , alsdan eene berekening als boven herhaalt, en van de door substitutie der nieuwe  $x'$  en  $y'$  thans bijkomende termen in  $xy$  en in  $y$  de coëfficiënten gelijk nul stelt, blijkt óf  $B' = 0$  te moeten wezen als boven, óf  $B = 0$ , wat slechts op eene verwisseling der coördinaten-assen nederkomt, óf wel de onderstelde kegelsnede blijkt in twee rechte lijnen te ontaar- den. De onderzochte vergelijking was derhalve algemeen ge- noeg, wat trouwens te voorzien was, omdat twee willekeurige kegelsneden — dus ook als de ééne zelf-wederkeerig is ten opzichte der andere — steeds perspectivisch te herleiden zijn tot een cirkel en tot eene kegelsnede met gemeenschappelijke as. (Zelfs met twee gemeenschappelijke assen, zoodat wij, strikt genomen, van den aanvang af ook  $B = 0$  hadden kunnen stellen, als wanneer de perspectivische vervorming der alsdan komende, boven als 4<sup>e</sup> oplossing vermelde en tevens voor  $b = 0$  in de 6<sup>e</sup> oplossing zelve begrepen, twee cirkels en twee gelijkzijdige hyperbolen  $y^2 = \pm x^2 \pm a^2$  ons tot geen minder algemeene uitkomst dan de zoo dadelijk te vermelden zou hebben geleid.)

Eene tweede opmerking is, dat, door in  $x'$  en  $y'$  de in  $a$  en  $b$  uitgedrukte waarden van  $A=C$  en  $B$  te substitueeren, als vergelijking der lijn van twee toegevoegde punten  $(x, y)$  en  $(x', y')$  der zelf-wederkeerige kegelsnede gevonden wordt

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{y'-y}{x'-x} = \frac{y}{x - \frac{a^2}{b}}; \text{ ten blijke, dat al dergelijke lijnen}$$

door de raakpool  $\left(\frac{a^2}{b}, 0\right)$  van deze kegelsnede zelve met den

richtcirkel gaan; zoodat tevens de raakkoorde  $x=b$  meetkundige plaats is der gemeenschappelijke polen van deze zelfde lijnen ten aanzien van de kegelsnede en van den richtcirkel.

Wat nu de perspectief betreft van den meergenoemden richtcirkel  $x^2 + y^2 = a^2$ , van zijne toegevoegde hyperbool  $x^2 - y^2 = a^2$ , en van de beide onderling toegevoegde kegelsneden  $a^2(x-b)^2 + (bx-a^2)^2 \mp (a^2-b^2)y^2 = 0$ , in die perspectief blijven niet alleen de drie laatstgenoemde krommen ieder dubbel-rakend en zelf-wederkeurig aan de eerste, maar bovendien komen de twee eerste krommen, die in de oorspronkelijke figuur om zoo te zeggen eene meer vaste hoofdrol vervulden, nu in dezelfde algemeene verhouding als de twee laatste voor. De voorkeur, aanvankelijk uitsluitend aan ééne der vier krommen als richtkromme toegekend, komt dan ook in de nieuwe figuur te vervallen, en deze figuur bestaat uit vier gelijkwaardige, elkander twee aan twee dubbel-rakende kegelsneden, ten opzichte van ieder van welke als richtkromme ieder der drie overigen haar eigen poolkromme is, ja zelfs de geheele, door zekere bijbehorende lijnen en punten aangevulde figuur haar eigen poolfiguur wordt. Voor het overzicht in analytischen zin schijnt hier de aanname der drie raakkoorden (dat zijn alzoo de perspectieven der drie oorspronkelijke raakkoorden  $y=0$ ,  $x=b$  en  $x=\frac{a^2}{b}$ ) als tri-

lineaire coördinaten-assen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  niet ongeschikt, en in dien zin komt men dan op de vier aan den assendriehoek  $ABC$  gekoppelde kegelsneden



$$-A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 + C^2 \gamma^2 = 0, \dots \dots \dots (1)$$

$$A^2 \alpha^2 - B^2 \beta^2 + C^2 \gamma^2 = 0, \dots \dots \dots (2)$$

$$A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 - C^2 \gamma^2 = 0, \dots \dots \dots (3)$$

$$A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 + C^2 \gamma^2 = 0, \dots \dots \dots (4)$$

neder, van welke, zoodra  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C^2$  bestaanbaar, hetzij positief of negatief, zijn, steeds drie bestaanbaar zijn en de vierde onbestaanbaar.

De bijbehorende figuur bij voorbeeld, betrekking hebbende op positieve  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C^2$ , en dus op eene onbestaanbare kegelsnede (4), vertoont:

Ia. Drie hoekpunten van den assendriehoek, of raakpolen der vier kegelsneden twee aan twee, als:  
A of ( $\beta=0$ ,  $\gamma=0$ ), waaruit  $B\beta = \pm C\gamma$  als raaklijnen van (2) en (3),  $B\beta = \pm C\gamma\sqrt{-1}$  als raaklijnen van (1) en (4), en hebbende BC of  $\alpha=0$  tot raakkoorde met (1), (2), (3) en (4);  
B of, enz.;  
C of, enz.

Ib. Drie zijden van den assendriehoek, of raakkoorden der vier kegelsneden twee aan twee, als:  
BC of  $\alpha=0$ , waarop  $B\beta = \pm C\gamma$  als raakpunten van (2) en (3),  $B\beta = \pm C\gamma\sqrt{-1}$  als raakpunten van (1) en (4), en hebbende A of ( $\beta=0$ ,  $\gamma=0$ ) tot raakpool met (1), (2), (3) en (4);  
CA of, enz.;  
AB of, enz.

IIa. Zes, twee aan twee op de drie lijnen van Ib, en drie aan drie op de vier lijnen van IIIb, liggende raakpunten der kegelsneden (1), (2), (3) twee aan twee, als:  
(BC) of ( $\alpha=0$ ,  $B\beta=C\gamma$ ), hebbende A (B C) of  $B\beta = C\gamma$  tot poollijn in (2) en (3), en A (B' C') of  $B\beta = -C\gamma$  tot poollijn in (1) en (4);

IIb. Zes, twee aan twee door de drie punten van Ia, en drie aan drie door de vier punten van IIIa, gaande raaklijnen der kegelsneden (1), (2), (3) twee aan twee, als:  
A(BC) of  $B\beta = C\gamma$ , hebbende (B C) of ( $\alpha=0$ ,  $B\beta = C\gamma$ ) tot pool in (2) en (3), en (B' C') of ( $\alpha=0$ ,  $B\beta = -C\gamma$ ) tot pool in (1) en (4);

(B' C') of ( $\alpha = 0, B\beta = -C\gamma$ ), hebbende A (B' C') of  $B\beta = -C\gamma$  tot poollijn in (2) en (3), en A (B C) of  $B\beta = C\gamma$  tot poollijn in (1) en (4);  
 (C A) of, enz.;  
 (C' A') of, enz.;  
 (A B) of, enz.;  
 (A' B') of, enz.

IIIa. Vier, twee aan twee op de zes lijnen van IIb liggende snijpunten van drie raaklijnen der kegelsneden (1), (2), (3) twee aan twee, als:

(A B C) of ( $A\alpha = B\beta = C\gamma$ ), hebbende (B' C') (C A) (A B) of  $-A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ , (B C) (C' A') (A B) of  $A\alpha - B\beta + C\gamma = 0$ , (B C) (C A) (A' B') of  $A\alpha + B\beta - C\gamma = 0$ , en (B' C') (C' A') (A' B') of  $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$  tot poollijnen opvolgend in (1), (2), (3) en (4);  
 (A' B C) of ( $-A\alpha = B\beta = C\gamma$ ), enz.;  
 (A B' C) of ( $A\alpha = -B\beta = C\gamma$ ), enz.;  
 (A B C') of ( $A\alpha = B\beta = -C\gamma$ ), enz.

A (B' C') of  $B\beta = -C\gamma$ , hebbende (B' C') of ( $\alpha = 0, B\beta = -C\gamma$ ) tot pool in (2) en (3), en (B C) of ( $\alpha = 0, B\beta = C\gamma$ ) tot pool in (1) en (4);  
 B (C A) of, enz.;  
 B (C' A') of, enz.;  
 C (A B) of, enz.;  
 C (A' B') of, enz.

IIIb. Vier, twee aan twee door de zes punten van IIa gaande lijnen van drie raakpunten der kegelsneden (1), (2), (3) twee aan twee, als:

(B' C') (C' A') (A' B') of  $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ , hebbende (A' B C) of ( $-A\alpha = B\beta = C\gamma$ ), (A B' C) of ( $A\alpha = -B\beta = C\gamma$ ), (A B C') of ( $A\alpha = B\beta = -C\gamma$ ), en (A B C) of ( $A\alpha = B\beta = C\gamma$ ) tot polen opvolgend in (1), (2), (3) en (4);

(B' C') (C A) (A B) of  $-A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ , enz.;  
 (B C) (C' A') (A B) of  $A\alpha - B\beta + C\gamma = 0$ , enz.;  
 (B C) (C A) (A' B') of  $A\alpha + B\beta - C\gamma = 0$ , enz.

Overeenkomstig het boven voor het geval van den richtcirkel opgemerkte, gaan bovendien de lijnen van elke twee ten opzichte van (2) wederkeerige punten van (3), en van (3) ten opzichte van (2), en van (1) ten opzichte van (4),

en van (4) ten opzichte van (1), allen door het punt A; terwijl het punt B eene zelfde beteekenis heeft voor de verbindingen (3) (1) en (2) (4), en het punt C voor de verbindingen (1) (2) en (3) (4).

Niet alleen zijn de vier gevonden kegelsneden (1), (2), (3), (4) ieder haar eigen poolkromme ten opzichte van ieder der drie overigen, maar zij hebben, wat meer is, de eigenschap dat, indien men van eene geheel willekeurige figuur de poolfiguur opmaakt ten opzichte van eene der vier kegelsneden, van deze poolfiguur weder de poolfiguur ten opzichte van eene tweede der kegelsneden, en indien men zoo voortgaat, totdat alle vier kegelsneden als richtkrommen verbruikt zijn, men weder op de oorspronkelijke figuur nederkomt. Want bij voorbeeld een willekeurig punt  $(l, m, n)$  heeft tot poollijn ten opzichte van (1)  $-A^2 l \alpha + B^2 m \beta + C^2 n \gamma = 0$ ; deze poollijn heeft tot pool ten opzichte van (2) het punt  $(-l, -m, n)$ ; deze pool heeft weder tot poollijn in (3)  $-A^2 l \alpha - B^2 m \beta - C^2 n \gamma = 0$ ; en van deze poollijn is eindelijk de pool in (4) het punt  $(-l, -m, -n)$ , dat is weder het oorspronkelijke punt. En daar dit nu geldt voor ieder punt, en blijkbaar evenzeer indien de hier genomen volgorde (1), (2), (3), (4) der vier kegelsneden door eenige andere orde wordt vervangen, is hiermede het gestelde bewezen.

Deze eigenschap heeft wel eenige overeenkomst met eene dergelijke, die bij omkeering van vlakke figuren volgens wederkeerige voerstralen geldt, namelijk (zie Dr. GINO LORIA, *Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan*, etc., in *The quarterly journal of pure and applied mathematics*, N<sup>o</sup>. 85, 1886, pag. 61): eene vlakke figuur verandert niet, indien zij onderworpen wordt aan vier omkeeringen, waarvan de richtcirkels elkander loodrecht doorsnijden. En niet onmogelijk is het, dat beide eigenschappen als bijzondere gevallen begrepen zouden zijn in eene meer algemeene theorie van vier — of ook minder of meer — vervormingen van ééne zelfde soort, die tot de oorspronkelijke figuur terugvoeren. Althans eenige andere eenvoudige gevallen van dezen aard laten zich dadelijk aangeven; bij voorbeeld,

symmetrische omzetting ten opzichte van vier het vlak in vier kwadranten verdeelende assen (waardoor men van eenig punt  $(x, y)$  opvolgend overgaat tot  $(x, -y)$ ,  $(-x, -y)$ ,  $(-x, y)$  en dan weder tot  $(x, y)$  zelf terugkeert); of omkeering beurtelings van eene der coördinaten (dat is vervorming van  $(x, y)$  tot  $(x, \frac{1}{y})$ ,  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ ,  $(\frac{1}{x}, y)$  en weder  $(x, y)$ ); of symmetrische omzetting ten opzichte der vier hoekpunten van een parallelogram (bij voorbeeld van  $(x, y)$  gaat men over tot  $(2a_1 - x, 2b_1 - y)$ ; enz.); en meer dergelijke. Ook in de ruimte zijn overeenkomstige in zich zelve wederkeerende vervormingen mogelijk; waarvan als voorbeeld kan strekken het geval van drie door eene lijn gaande vlakken en van drie in eene lijn liggende punten, welke beide stelsels onderling zóó kunnen samenhangen, dat, als men de perspectief van iedere in een der vlakken liggende figuur uit het bijbehorende punt neemt op een tweede der vlakken als glas, hiervan weder de perspectief uit het bijbehorende punt op het derde vlak, en van deze de perspectief uit het derde punt op het eerste vlak, aldaar weder de oorspronkelijke figuur terugkomt.

Door den Heer J. C. KLUYVER werd ik opmerkzaam gemaakt, dat in § 54 van STEINER-SCHRÖTER, Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften, 1867, het boven besproken viertal kegelsneden reeds als »harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte», ofschoon langs geheel anderen weg, behandeld is; dat het ook voorkomt in Dr. CHR. WIENER, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I; en dat in het Bulletin de la Société philomatique, VII, 1, eene verhandeling van FOURET te vinden is over krommen, die hare eigen wederkeerige poolfiguren zijn ten opzichte van oneindig vele kegelsneden; alwaar volgens het Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik onder anderen de volgende eigenschap voorkomt: »Wenn eine Curve  $C$  die Eigenschaft hat, dass sie in Bezug auf ein einstufiges Kegelschnittssystem ihre eigene Polare darstellt, so liegt jeder beliebige Punkt zusammen mit den Berührungspunkten aller von ihm ausgehenden Tangenten auf einem und demselben Kegelschnitt.

Eine solche Curve  $C$  hat die Gleichung  $u^\alpha v^\beta w^\gamma = D$ , wo  $u$ ,  $v$ ,  $w$  lineare Funktionen von  $x$  und  $y$  bedeuten,  $D$  eine beliebige Constante ist, und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  drei reelle oder imaginäre Zahlen sind, welche der Bedingung  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  genügen. Analoges findet bei Flächen statt".

---

Na deze uitweiding keeren wij thans tot ons eigenlijk onderwerp terug. Maar in plaats van, als boven, te blijven uitgaan van eene aangenomen soort van krommen, om te onderzoeken, welke krommen van deze soort misschien tot de zelf-wederkeerige kunnen behooren, kan men althans in sommige gevallen zelf-wederkeerige krommen ook rechtstreeks bij voorbeeld als volgt bepalen. Men denke zich de omhullende der verbindingslijn telkens van twee bijeenbehoorende of toegevoegde punten  $(x, y)$  en  $(x', y')$  eener zelf-wederkeerige kromme; men verlange dat deze omhullende eene gegeven kromme  $(X, Y)$  zal zijn, en trachte langs dezen weg de zelf-wederkeerige te vinden, waartoe zij aanleiding kan geven. Niet ondoelmatig schijnt het daarbij, zich deze omhullende volgens Monge gegeven te denken — indien  $f$  eene willekeurige functie van eenige veranderlijke  $\alpha$ , en  $f'$  en  $f''$  de eerste en de tweede afgeleide dier functie voorstellen — door het stel formules  $X = f \sin \alpha + f' \cos \alpha$ ,  $Y = -f \cos \alpha + f' \sin \alpha$ , waarin, blijkens  $\frac{dY}{dX} = \frac{(f + f'') \sin \alpha \cdot d\alpha}{(f + f'') \cos \alpha \cdot d\alpha} = \tan \alpha$ ,  $\alpha$  de richtingshoek der raaklijn in  $(X, Y)$  beteekent. Noemt men dan namelijk  $r$  en  $r'$  de afstanden van dit raakpunt tot de beide op deze raaklijn liggende toegevoegde punten  $(x, y)$  en  $(x', y')$  der zelf-wederkeerige kromme, dan heeft men  $x = X + r \cos \alpha = f \sin \alpha + (r + f') \cos \alpha$ ,  $y = Y + r \sin \alpha = -f \cos \alpha + (r + f') \sin \alpha$ , en  $x'$  en  $y'$  evenzoo behoudens vervanging van  $r$  door  $r'$ . De substitutie dezer waarden in de bij den aanhef opgemaakte betrekkingen  $xx' + yy' = a^2$  en  $x'dx + y'dy = 0$  tusschen twee ten opzichte van den richtcirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  wederkeerige punten geeft dan voor eerst  $(r + f')(r' + f') + f^2 = a^2$ , ten andere  $-fr + (r' + f')$ .

$\cdot \left( f + f'' + \frac{d r}{d \alpha} \right) = 0$ , dus ook, door  $r'$  tusschen deze beiden te elimineeren,  $f r^2 + f f' r + (f^2 - a^2)(f + f'') + (f^2 - a^2) \frac{d r}{d \alpha} = 0$ . Terwijl de eerste dezer drie vergelijkingen bij onderlinge verwisseling van  $r$  en  $r'$  onveranderd blijft, laat zich uit de tweede door die verwisseling nog eene overeenkomstige afschrijven, evenals uit de derde, die zoodoende blijkt eene gemeenschappelijke differentiaal-vergelijking ter bepaling van  $r$  en  $r'$  te zijn. Wordt deze vergelijking, na voor  $f$ , dus ook voor  $f'$  en  $f''$ , bepaalde functiën van  $\alpha$  te hebben aangenomen, geïntegreerd, dan zullen  $r$  en  $r'$  zich dus in het algemeen slechts door twee verschillende waarden van de integratie-standvastige onderscheiden: twee waarden trouwens, die krachtens  $(r + f')(r' + f') + f^2 = a^2$  aan elkander gebonden zijn. Zoodoende worden, door de verkregen  $r$  in  $x$  en  $y$ , en  $r'$  in  $x'$  en  $y'$  te substitueeren, en door voorts  $\alpha$  te elimineeren, twee onderling gelijksoortige wederkeerige poolkrommen  $(x, y)$  en  $(x', y')$  bepaald; en in al die gevallen dus, waarin zich de twee genoemde standvastigen zóó laten nemen, dat deze beide krommen samenvallen, ééne enkele zelf-wederkeerige kromme. In sommige omstandigheden zou het mogelijk aanbeveling verdienen, in plaats van de gemeenschappelijke differentiaal-vergelijking in  $r$  of in  $r'$  de gemakkelijker op te maken overeenkomstige vergelijking voor  $\frac{1}{r}$  of voor  $\frac{1}{r'}$  of voor eene der symmetrische functiën  $r + r'$ ,  $r r'$  of  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$  te gebruiken.

Wij zullen ten besluite de thans besproken handelwijze nog op een paar voorbeelden toepassen, en nemen daarbij in de eerste plaats het geval, waarin verlangd wordt, dat de beschouwde omhullingskromme zich tot een enkel punt  $\left( X = \frac{a^2}{b}, Y = 0 \right)$  herleidt. Daartoe heeft men te stellen  $f = \frac{a^2}{b} \sin \alpha$ , dus  $f' = \frac{a^2}{b} \cos \alpha$  en  $f'' = -\frac{a^2}{b} \sin \alpha = -f$ ; zoodat de vergelijking, waardoor  $r$  en  $r'$  zelve samenhangen,

en de gemeenschappelijke differentiaal-vergelijking, waarvan beiden afhangen, thans blijken onder de vormen  $\left(\frac{1}{r} - \frac{b \cos \alpha}{b^2 - a^2}\right)$ .

$$\cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{b \cos \alpha}{b^2 - a^2}\right) = \frac{b^2 (b^2 - a^2 \sin^2 \alpha)}{a^2 (b^2 - a^2)^2} \text{ en } d \cdot \frac{1}{r} + \frac{a^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \cdot$$

$$\frac{1}{r} d\alpha = - \frac{b \sin \alpha}{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \text{ geschreven te kunnen worden.}$$

Deze laatste, lineaire, vergelijking geeft tot algemeene integraal

$$\frac{1}{r} = \frac{b \cos \alpha}{b^2 - a^2} + C \sqrt{(b^2 - a^2 \sin^2 \alpha)}; \text{ voor } \frac{1}{r} \text{ geldt dus dezelfde}$$

waarde, behoudens vervanging van  $C$  door zekere  $C'$ ; en de eerste vergelijking leert dan, dat de beide standvastigen moeten

samenhangen volgens  $CC' = \frac{b^2}{a^2 (b^2 - a^2)^2}$ . Zoodra dit het ge-

val is, bepaalt de gevonden  $\frac{1}{r}$  in verband met  $x = \frac{a^2}{b} +$

$+ r \cos \alpha$  en met  $y = r \sin \alpha$ , door  $r$  en  $\alpha$  tusschen hen te elimineeren, eene kromme, en bepalen  $r'$ ,  $x'$  en  $y'$  op dezelfde wijze eene kromme van dezelfde soort, in dier voege, dat deze beiden elkanders wederkeerige poolkrommen zijn, en wel zóó, dat volgens den gestelden eisch de lijn van twee wederkeerige punten steeds door het vaste punt  $\left(\frac{a^2}{b}, 0\right)$  gaat.

Maar tot ééne enkele, rationeele, zelf-wederkeerige, samen-vallen, kunnen deze twee krommen, gelet op den irrationee-len voor  $\frac{1}{r}$  en  $\frac{1}{r'}$  gevonden vorm, slechts dán, wanneer  $C = -C'$

en dus  $= \pm \frac{b}{a (b^2 - a^2)} \sqrt{-1}$  is. Alsdan wordt  $\frac{1}{r} = \frac{b \cos \alpha}{b^2 - a^2} \pm \pm \frac{b \sqrt{(a^2 \sin^2 \alpha - b^2)}}{a (b^2 - a^2)}$ , hetgeen, ter evenvermelde eliminatie

van  $r$  en  $\alpha$  geschreven als  $a^2 \{b - (\frac{a^2}{b} + r \cos \alpha)\}^2 - \{(a^2 - b^2) \cdot$

$\cdot (r \sin \alpha)^2 - (b r \cos \alpha)^2\} = 0$ , dadelijk geeft  $a^2 (x - b)^2 - (a^2 - b^2) y^2 + + (b x - a^2)^2 = 0$ , dat is niet alleen de reeds boven ten op-zichte van den richtcirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  beschouwde algemeene kegelsnede, maar nu tevens deze kegelsnede als de eenige zelf-wederkeerige kromme, waarvoor de omhullende der lijnen

van de toegevoegde punten-paren zich tot een enkel punt samentrekt.

Als tweede toepassing nemen wij het geval, waarin de meergenoemde omhullende de cirkel  $X^2 + Y^2 = b^2$  zal zijn. Daartoe moet  $f = b$ , dus  $f' = 0$  en  $f'' = 0$ , genomen worden, waardoor de eindige vergelijking tusschen  $r$  en  $r'$  en de differentiaal-vergelijking in  $r$  of in  $r'$  worden  $rr' + (b^2 - a^2) = 0$

en  $\frac{dr}{r^2 + b^2 - a^2} = -\frac{b da}{b^2 - a^2}$ . Deze laatste geeft als algemeene

integraal  $r = -\sqrt{(b^2 - a^2)} \cdot \text{tg} \left\{ \frac{b a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} + C \right\}$ , dus voor

$r'$  dezelfde waarde, maar met  $C'$  in plaats van  $C$ ; en de substitutie van deze  $r$  en  $r'$  in de eerste vergelijking doet dan zien dat,  $k$  een willekeurig geheel getal zijnde,  $C' = C \pm \frac{(2k+1)\pi}{2}$  moet zijn. Met inachtneming hiervan zal de

eliminatie van  $r$  en  $a$  tusschen de gevonden  $r$  in verband met  $x = b \sin a + r \cos a$  en  $y = -b \cos a + r \sin a$ , of, wat hetzelfde is, de eliminatie van  $a$  tusschen de beide vergelijkingen  $x \sin a - y \cos a = b$  en  $(r =) \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)} =$

$= -\sqrt{(b^2 - a^2)} \cdot \text{tg} \left\{ \frac{b a}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} + C \right\}$ , als meetkundige plaats

van  $(x, y)$  de transcendentale kromme  $x \sin \left\{ \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b} \right\}$

$$\cdot \left( \text{boog tg} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - b^2}{b^2 - a^2}} + C \right) \left\{ + y \cos \left\{ \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b} \right\} \right.$$

$$\cdot \left( \text{boog tg} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - b^2}{b^2 - a^2}} + C \right) \left\{ = -b \text{ opleveren, die nu,} \right.$$

ten opzichte van  $x^2 + y^2 = a^2$  als richtcirkel en met den gelijkmiddelpuntigen cirkel  $X^2 + Y^2 = b^2$  als omhullende der meergenoemde verbindingslijnen, de wederkeerige poolkromme is van de gelijksoortige transcendentale, voor welke

$C \pm \frac{(2k+1)\pi}{2}$  in plaats van  $C$  komt. Voor het samenvallen

overigens dezer beide krommen wordt,  $k$  weder eenig geheel

getal zijnde, vereischt  $\frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b} C' = \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b} C \pm 2k\pi$ ,



dat is  $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} (2k + 1) = \pm 4k'$ , zoodat men, door de notatie  $K = \pm \frac{4k'}{2k + 1}$  in te voeren en tegelijkertijd — zonder aan de algemeenheid te kort te doen — de coördinaten-assen zóó te laten wentelen, dat de willekeurige standvastige  $C = 0$  wordt, als transcendentale zelf-wederkeerige kromme van dezen aard verkrijgt  $x \sin \left\{ K \text{ boog } tg \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{b K} \right\} + y \cos \left\{ K \text{ boog } tg \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{b K} \right\} = -b$ .

---

Min of meer in verband met het behandelde onderwerp staat de misschien reeds elders herhaaldelijk gemaakte opmerking, dat ook de logarithmische spiraal, ofschoon niet tot de zelf-wederkeerige poolkrommen behorende, toch onder de menigvuldige krommen van hare eigen soort, waartoe zij aanleiding geeft, hare voetpuntskromme, hare omgekeerde en dus ook hare wederkeerige poolkromme als zoodanig vertoont.

---

# NIEUW BEWIJS VOOR DE STELLING VAN EULER, BEWEZEN VOOR CONVEXE LICHAMEN,

DOOR

**J. M. THIEL.**

---

In de ruimte kunnen wij een vlak beschouwen, dat aan geen enkele der ribben van een veelvlak evenwijdig is. We bewegen dat vlak, door het evenwijdig aan zich zelf te verschuiven, dóór het lichaam heen, en teekenen daarbij aan het aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken, welke bij die beweging achtereenvolgens boven het vlak komen: de ribben en zijvlakken eerst dan, als ze geheel door het vlak zijn gegaan. Wanneer het eerste hoekpunt er boven verschenen is, zijn er nog geen zijvlakken en ribben, die geheel boven het vlak liggen. Maar telkens wanneer één der overige hoekpunten (uitgezonderd het laatste) door het vlak treedt, merken we het volgende op.

Bij het aantal hoekpunten moet één worden genoteerd. Wanneer er in dat hoekpunt  $n$  ribben samenkomen, waarvan er  $p$  met betrekking tot het vlak eene bovenwaartsche en de overige eene benedenwaartsche richting hebben (geen der ribben is evenwijdig met het vlak), dan komen met dat hoekpunt de  $p$  bovenwaarts gerichte ribben en de  $(p-1)$  zijvlakken, die zij twee aan twee insluiten, mede geheel boven het vlak te liggen. Daaruit volgt, dat, telkens wanneer een hoekpunt boven het vlak verschijnt, de gezamenlijke aanwas van 't aantal hoekpunten en 't aantal zijvlakken gelijk is aan dien van 't aantal ribben.

Alleen rest ons nog na te gaan, wat wij te hebben op te schrijven, wanneer het laatste hoekpunt boven het vlak treedt; men heeft dan eene vermeerdering van 't aantal hoekpunten met één, terwijl het aantal ribben en zijvlakken thans met gelijk aantal vermeerdert, daar de  $q$  ribben, die in dit hoekpunt samenkomen, niet, zooals bij de voorgaande hoekpunten,  $(q-1)$  zijvlakken, maar  $q$  zijvlakken insluiten, die een gesloten geheel vormen.

Met de eenvoudige gevolgtrekking, dat, behalve bij 't eerste en 't laatste hoekpunt, telkens een aantal ribben overeenstemt met de som van eenige zijvlakken en een hoekpunt, is thans aangetoond, dat

$$H + Z = R + 2.$$

Naast het bovenstaande bewijs geef ik een ander, dat op dezelfde gronden rust. In plaats van een vlak evenwijdig te verschuiven, doen we het wentelen om eene lijn, die alle ribben kruist en geheel buiten het lichaam ligt, zoodat geen enkele ribbe bij die wenteling in het vlak zal kunnen vallen. Ons eerste bewijs gaat hier woordelijk door, namelijk telkens als een hoekpunt door het vlak treedt, komen  $q$  ribben en  $(q-1)$  zijvlakken geheel aan de zijde van het vlak te liggen, waarvan de beweging uitgaat, behalve bij het eerste en laatste hoekpunt.

In de derde plaats kan men ook het vlak doen wentelen om eene lijn, die, alle ribben kruisende, twee der zijvlakken snijdt. Ook dan gaat het bewijs bijna woordelijk door. Alleen is dan van een eerste en laatste hoekpunt geen sprake, maar in plaats daarvan zijn de twee zijvlakken, die door de lijn worden gesneden bij de telling, waarbij wederom telkens het aantal hoekpunten met één, het aantal ribben met  $q$  en het aantal zijvlakken met  $(q-1)$  vermeerderde, niet opgenomen. Zoodat ook hieruit volgt, dat het gezamenlijke aantal hoekpunten en zijvlakken het aantal ribben met twee overtreft.

Er zijn natuurlijk nog zeer vele standen voor de as van wenteling te bedenken, doch de twee behandelde zijn ongetwijfeld de voornaamste. Van de drie bewijzen is mijns inziens het eerste het meest aanschouwelijke.

---

# BEWIJS EENER STELLING UIT DE HOOGERE ALGEBRA,

DOOR

Dr. G. J. D. MOUNIER.

Het leerboek der hoogere algebra van W. SMAASEN, bewerkt door prof. BIERENS DE HAAN, bevat onder § 15 de volgende algemeen bekende stelling met het gebruikelijke bewijs:

Eene functie zal slechts op ééne wijze voor dezelfde waarde van het argument in eene reeks volgens de opklimmende (of afdalende) machten van hetzelfde ontwikkelbaar zijn.

Het bewijs nu wordt door het volgende schema gegeven. Stellende dat  $f(x)$  voorgesteld wordt zoowel door  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  als door  $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$ , zijnde natuurlijk beide ontwikkelingen convergent ondersteld, heeft men

$$\begin{array}{rcl}
 a_0 & = b_0 & \text{voor } (x = 0) \\
 \hline
 & & \text{af} \\
 x \frac{a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{a_1 + a_2 x + \dots} & = & \frac{b_1 x + b_2 x^2 + \dots}{b_1 + b_2 x + \dots} \\
 a_1 & = & b_1 \quad \text{voor } (x = 0) \\
 \hline
 & & \text{af} \\
 a_2 x + \dots & = & b_2 x + \dots
 \end{array}$$

en zoo voort.

Dit bewijs nu vereischt mijn inziens eene nadere toelichting en eene kleine wijziging. Immers toen door  $x$  gedeeld is,

werd van de onderstelling uitgegaan dat  $x \geq 0$ , anders toch ware de deeling volgens de bekende eigenschappen der lagere stelskunde niet geoorloofd. De uitkomst dezer deeling geldt dus voor alle waarden van  $x$ , waarvoor convergentie plaats heeft, uitgenomen voor  $x = 0$ , voor welk laatste geval het nog niet zeker is, dat de na deeling verkregen vergelijking doorgaat, en juist de waarheid van dit twijfelachtige geval is ondersteld om tot  $a_1 = b_1$  te geraken.

Om aan deze moeielijkheid te ontkomen, redeneeren we liever als volgt:

Stel in  $a_1 + a_2 x + \dots = b_1 + b_2 x + \dots$   $x$  gelijk aan eene zeer kleine grootheid  $\delta$ , die wij tot nul kunnen doen naderen, doch nimmer gelijk nul mogen nemen.

Voor al de waarden, die wij zoodoende aan  $\delta$  kunnen geven, gaat dan de vergelijking  $a_1 + a_2 \delta + \dots = b_1 + b_2 \delta + \dots$  door. Stellen wij nu  $a_2 \delta + a_3 \delta^2 + \dots = \varepsilon$  en  $b_2 \delta + b_3 \delta^2 + \dots = \theta$ , dan volgt hieruit

$$a_1 + \varepsilon = b_1 + \theta;$$

zoodat,  $a_1 \geq b_1$  onderstellende,

$$a_1 - b_1 = \theta - \varepsilon$$

is. Deze waarde  $\theta - \varepsilon$  kan hoogstens gelijk zijn aan de som van de absolute waarden van  $\theta$  en  $\varepsilon$ . Door nu  $\delta$  maar klein genoeg te nemen, kunnen wij  $\theta$  en  $\varepsilon$  zoo klein maken als wij slechts willen en dus ook haar som kleiner dan eene willekeurige zeer kleine grootheid  $q$ .

Uit  $[\theta] + [\varepsilon] < q$  volgt nu

$$a_1 - b_1 < q. \dots\dots\dots 1)$$

Stellen wij nu, om tot een bewijs uit het ongerijmde te geraken,  $a_1 > b_1$ ; dan zal men een bepaald verschil  $p$  tusschen deze twee grootheden vinden. Men heeft dus

$$a_1 - b_1 = p \dots\dots\dots 2)$$

Aan  $p$  kunnen wij niets veranderen, maar  $q$  kunnen wij willekeurig klein nemen en dus ook

$$q < p. \dots\dots\dots 3)$$

Uit 2) en 3) volgt nu

$$a_1 - b_1 > q,$$

zijnde in strijd met 1).

Was  $b_1 > a_1$ , dan zou men dezelfde redeneering kunnen volgen en tot eene dergelijke ongerijmdheid komen. Hieruit blijkt dus dat  $a_1 = b_1$  moet zijn.

Wij hebben thans nog de vraag te behandelen, of men door  $\delta$  maar klein genoeg te maken, ook werkelijk  $\epsilon$  en  $\theta$  zoo klein kan krijgen, als men begeert.

Schrijven wij voor  $a_2 \delta + a_3 \delta^2 + \dots$  en  $b_2 \delta + b_3 \delta^2 \times \dots$  achtereenvolgens

$$\delta \times (a_2 + a_3 \delta + \dots)$$

en

$$\delta \times (b_2 + b_3 \delta + \dots),$$

en merken wij op, dat de beide laatste factoren convergente reeksen zijn, die dus voor elke waarde van  $\delta$  tot bepaalde eindige waarden naderen; dan volgt hieruit, dat deze producten ook zoo klein gemaakt kunnen worden, als men slechts verlangt. Immers, voor elke waarde van  $\delta$  convergent zijnde, zullen bij verandering van  $\delta$  de beide laatste factoren steeds eindige waarden behouden, hoe klein ook  $\delta$  genomen worde.

Daar nu

$$Gr \frac{u_{m+1}}{u_m} = Gr \left\{ \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \delta \right\}$$

is en deze grens kleiner dan één gemaakt kan worden door  $\delta$  maar klein genoeg te nemen, bijvoorbeeld door, wanneer

$Gr \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} = Gr \varphi(\omega) (\omega = \infty)$  was  $\delta = \frac{p}{\varphi(\omega)}$  te nemen (zijnde  $p$  een echte breuk), zullen de beide tweede factoren ook convergent blijven, wanneer men al de termen positief neemt, mits men slechts zorg  $\delta$  klein genoeg te maken.

De waarden der beide producten zullen nu kleiner zijn <sup>1)</sup> dan de waarden, die zij verkrijgen zouden door de termen der beide laatste factoren allen positief te maken. In dit laatste geval echter kan men de eerste factoren zoo klein maken, als men slechts wil; terwijl de tweede factoren daardoor tegelijkertijd kleinere eindige waarden zullen verkrijgen. De producten kunnen dus zoo klein gemaakt worden, als

---

1) Natuurlijk =, indien de termen reeds allen positief waren.

men verlangt, en à fortiori dus ook de producten, die vóór de verandering van teekens verkregen werden.

Tegen de zooveen gegeven redeneering zou mogelijk als bezwaar kunnen aangevoerd worden, dat door  $\delta = \frac{p}{\phi(\omega)}$  te stellen  $\delta$  tot eene functie gemaakt is van het aantal termen. Wij dienen dus bij dit punt nog even stil te staan. Gaan wij uit van de gewone bepaling: de som van eene convergente reeks is de grens, waartoe de som der termen van de reeks nadert, wanneer het aantal termen voortdurend verder wordt uitgestrekt; dan blijkt hieruit, dat men steeds met een wel voortdurend grooter wordend, maar toch steeds eindig aantal termen te doen heeft. Zoolang nu dit getal termen eindig is, zal de grens nog niet bereikt, in ons geval de  $\phi(\omega)$  nog niet  $\infty$  zijn. Zóó lang is het dus mogelijk, zonder  $\delta$  nul te maken,  $\delta = \frac{p}{\phi(\omega)}$  te nemen, zijnde nu  $\delta$  voor een groot aantal

termen zeer klein en wel eene kleine grootheid van eene door de  $\phi$  bepaalde orde. Bij het uitbreiden van het aantal termen wordt nu wel gelijktijdig  $\delta$  steeds kleiner genomen, maar dan geldt die kleinere waarde ook voor de geheele reeks. Wij krijgen dus reeksen, die niet alleen in aantal termen, maar ook in het argument  $\delta$  verschillen, doch ieder zelfstandig bestaan, en dus onafhankelijk zijn van de omstandigheid, dat  $\delta$  in de overigen andere waarden bezit. Hoever ook opgeschreven beantwoordt derhalve eene dusdanige reeks aan de eischen der convergentie, en ook tot zoover hebben wij de zaak te onderzoeken, daar een werkelijk oneindig aantal in de theorie der grenzen, en zoo ook in die der reeksen is uitgesloten.

De moeielijkheid, welke mijns inziens in het bovengenoemde bewijs van SMAASEN bestaat, is hierin dus gelegen, dat in  $a_1 + a_2 x + \dots = b_1 + b_2 x + \dots$  eerst onderzocht dient te worden, of deze betrekking ook voor  $x=0$  geldig blijft, en het voor dit onderzoek noodig is te weten, dat men inderdaad, ook zonder  $x=0$  te stellen, de beide leden de waarden kan doen naderen, die zij voor  $x=0$  zouden krijgen. Er is namelijk niet bewezen, dat bij den overgang van  $\delta$  tot

0 geen ondoorloopendheid intreedt. Wel zou oogenschijnlijk deze zaak kunnen uitgemaakt worden door ééns te differentieeren; maar dit helpt inderdaad niets, daar men dan eene dergelijke vorm verkrijgt, en zich dus weer voor dezelfde moeielijkheid geplaatst vindt; terwijl uit ondoorloopendheid of oneindigheid van differentiaalquotienten nog niet de ondoorloopendheid of oneindigheid der functiën zelf volgt.

In het bovenstaande heb ik getracht mijne bezwaren uiteen te zetten tegen een algemeen gebruikelijk bewijs. Het mededeelen van bezwaren is evenwel gemakkelijker dan het wegnemen daarvan. Toch heb ik eene poging daartoe gewaagd; in hoeverre ik daarin geslaagd ben, wil ik gaarne onderwerpen aan het oordeel van andere wiskundigen. Wellicht kan langs dezen weg over dit punt meerder licht worden ontstoken.

---



# EEN REKENKUNDIGE EIGENSCHAP DER BINOMINAAL-COËFFICIENTEN,

DOOR

**Dr. H. EKAMA.**

---

Het is bekend, dat zoolang de binominaal-coëfficiënten uit één cijfer bestaan, en men schrijft die, welke tot een bepaalde macht behooren in volgorde naast elkander, dat het verkregen getal dan de overeenkomstige macht van 11 is. Zoo heeft men voor de derde macht 1.3.3.1, dat is  $11^3$ .

De eigenschap blijft doorgaan, al bestaan de coëfficiënten uit meer cijfers; maar men moet nu, het getal van achteren af beginnende, van den eersten coëfficiënt, die uit twee of meer cijfers bestaat, alleen het laatste cijfer nemen en het overige deel bij den volgende coëfficiënt optellen. Van deze som neemt men weer het laatste cijfer, en zoo gaat men voort. Voor de zesde macht zijn de coëfficiënten bijvoorbeeld

1. 6. 15. 20. 15. 6. 1.

Dit geeft

$$1771561 = 11^6.$$

Men kan deze eigenschap gemakkelijk bewijzen; men heeft toch

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n.$$

Stelt men nu  $a = 10$  en  $b = 1$ , dan verkrijgt men

$$11^n = 10^n + C_n^1 10^{n-1} + C_n^2 10^{n-2} \dots + 1.$$

De eigenschap is een gevolg van het feit, dat 10 het

grondtal van ons talstelsel is. Is  $p$  het grondtal, en passen wij de hierboven opgegeven handelwijze toe op de binominaal coëfficiënten in het  $p$ -tallig stelsel uitgedrukt, dan zal het gevonden getal de overeenkomstige macht van  $p+1$  zijn.

Bijvoorbeeld 1331 in het vijftallig stelsel is in het tientallig  $216 = 6^3$  en  $15(10)(10)51$  in het twaalftallig stelsel is in het tientallig  $371293 = 13^5$ .

---

## HET SCHIMMEL- OF KLOK EN HAMER-SPEL,

DOOR

**Dr. H. EKAMA.**

---

In het begin dezer eeuw was dit spel zeer gezocht, doch tegenwoordig wordt het slechts zelden gespeeld, zoodat het mij niet overbodig schijnt, de regels van het spel op te geven, voordat ik de betrekkelijke waarde der kaarten bepaal.

Deze kaarten zijn vijf in getal, te weten; een met een schimmel, een met een klok, een met een hamer, een met een klok en een hamer, en een met een huis. Verder heeft men 8 dobbelsteen, op twee van deze staat een klok of een hamer en op de zes overigen staat één der cijfers van 1 tot 6.

Ieder der spelers zet een bepaalde som in, waarna de kaarten aan de meest biedenden verkocht worden, terwijl de kooppenningen ook in de kas gestort worden. Elk der spelers werpt nu op zijn beurt en ontvangt zooveel penningen uit de kas als hij oogen werpt; tenzij een der figuren of beide boven liggen, dan zijn de penningen voor den bezitter der overeenkomstige kaart. Ligt geen der cijfers boven, dan schimmelt diegene, die dit werpt; in dit geval moet hij één penning aan den eigenaar van den schimmel betalen. Ligt alleen een figuur boven, dan moet de kooper der overeenkomstige kaart er een aan den schimmel geven.

Het spel gaat op deze wijze voort, totdat er meer oogen geworpen worden, dan er penningen in kas zijn. Nu wordt

zoowel de steen met den hamer als die met de klok verwijderd, en komt het huis aan de beurt. Ook het schimmelen houdt op. Men moet nu wat men meer gooit dan in kas is aan den eigenaar van het huis betalen; dit duurt zoolang, totdat een der spelers juist het aantal kaspenningen werpt. Werpt iemand minder, zoo ontvangt hij deze som uit de kas.

De kans om ten nadeele van zich zelf te schimmelen is  $\frac{5^8}{6^8}$ ;  
de kans om ten nadeele van de klok of van den hamer te schimmelen is  $\frac{5^7}{6^8}$ ,

en de kans om ten nadeele van de klok en hamer te schimmelen is  $\frac{5^6}{6^8}$ ;

en dus is de kans, dat men ten voordeele van den bezitter van den schimmel zal werpen,

$$\frac{5^8 + 2 \times 5^7 + 5^6}{6^8} = \frac{6^2 \times 5^8}{6^8}.$$

Alle overige keeren werpt men of voor zich zelf, of voor de klok, of voor den hamer, of voor de klok en hamer.

De kans, dat men niet schimmelt, is

$$\frac{6^8 - 6^2 \times 5^6}{6^8} = \frac{6^2 (6^6 - 5^6)}{6^8}.$$

De kans om ten bate van zich zelf te werpen is

$$\frac{5^2 (6^6 - 5^6)}{6^8};$$

de kans om voor de klok of voor den hamer te werpen is

$$\frac{5 (6^6 - 5^6)}{6^8};$$

en de kans, dat men voor den bezitter van klok en hamer werpt is

$$\frac{6^6 - 5^6}{6^8}.$$

Wij moeten nu nagaan, welke hoeveelheden men met de zes steenen met cijfers werpen kan, en welke de waarschijnlijkheid van elken worp is. Hiertoe moeten wij onderzoeken, welke de combinaties zijn van de grootheden 1.2.3.4.5.6 1 aan 1, 2 aan 2 enz. tot 6 aan 6.

De verschillende worpen zijn nu voor

1	1.
2	2.
3	3        en 1.2.
4	4        en 1.3.
5	5        ; 1.4        en 2.3.
6	6        ; 1.5        ; 2.4        en 1.2.3.
7	1.6        ; 2.5        ; 3.4        en 1.2.4.
8	2.6        ; 3.5        ; 1.2.5        en 1.3.4.
9	3.6        ; 4.5        ; 1.2.6; 1.3.5        en 2.3.4.
10	4.6        ; 1.3.6        ; 1.4.5; 2.3.5        en 1.2.3.4.
11	5.6        ; 1.4.6        ; 2.3.6; 2.4.5        en 1.2.3.5.
12	1.5.6        ; 2.4.6        ; 3.4.5; 1.2.3.6        en 1.2.4.5.
13	2.5.6        ; 3.4.6        ; 1.2.4.6 en 1.3.4.5.
14	3.5.6        ; 1.2.5.6; 1.3.4.6 en 2.3.4.5.
15	4.5.6        ; 1.3.5.6; 2.3.4.6 en 1.2.3.4.5.
16	1.4.5.6; 2.3.5.6        en 1.2.3.4.6.
17	2.4.5.6 en 1.2.3.5.6.
18	3.4.5.6 en 1.2.4.5.6.
19	1.3.4.5.6.
20	2.3.4.5.6.
21	1.2.3.4.5.6.

De kans van elke hoeveelheid zal dus zijn, terwijl kortheidshalve de noemer  $6^6 = 46656$  overal is weggelaten, voor

1	$5^5$	3125
2	$5^5$	3125
3	$5^5 + 5^4$	3750
4	$5^5 + 5^4$	3750
5	$5^5 + 2 \times 5^4$	4375
6	$5^5 + 2 \times 5^4 + 5^3$	4500
7	$3 \times 5^4 + 5^3$	2000
8	$2 \times 5^4 + 2 \times 5^3$	1500
9	$2 \times 5^4 + 3 \times 5^3$	1625
10	$5^4 + 3 \times 5^3 + 5^2$	1025
11	$5^4 + 3 \times 5^3 + 5^2$	1025
12	$3 \times 5^3 + 2 \times 5^2$	425
13	$2 \times 5^3 + 2 \times 5^2$	300
14	$5^3 + 3 \times 5^2$	200

15	$5^3 + 2 \times 5^2 + 5$	180
16	$2 \times 5^2 + 5$	55
17	$5^2 + 5$	30
18	$5^2 + 5$	30
19	5	5
20	5	5
21	1	1

$$6 \times 5^6 + 15 \times 5^4 + 20 \times 5^3 + 15 \times 5^2 + 6 \times 5 + 1 = 31031 = 6^8 - 5^8$$

Deed de speler  $6^6$  worpen met deze zes steenen, dan zou hij, daar hij zooveel penningen ontvangt als zijn worp oogen telt, waarschijnlijk krijgen

$$21 \times 5^5 + 105 \times 5^4 + 210 \times 5^3 + 210 \times 5^2 + 105 \times 5^1 + 21$$

of

$$21 \times (5 + 1)^5 = 21 \times 6^5 = 163296 \text{ penningen};$$

ten minste wanneer men niet let op hetgeen hij voor het schimmelen betalen moet. Hij schimmelt nu  $5^6$  maal, en dus verkrijgt hij in  $6^6$  worpen waarschijnlijk 147671 penningen.

Stellen wij den inzet van iederen speler  $I$ , en zijn er  $n$  spelers, dan zetten zij alle tezamen  $n I = I'$  in. Verder onderstellen wij, dat de verkooping der kaarten heeft opgebracht voor den schimmel  $S$ , voor de klok  $K$ , voor den hamer  $H$ , voor de klok en hamer  $K_h$ , en voor het huis  $H_u$ ; dan is de kas  $P$

$$P = I' + S + K + H + K_h + H_u.$$

Zij het aantal worpen, noodig om de kas zoover uit te putten, dat zij niet meer betalen kan,  $m$ . Een speler wint waarschijnlijk bij een worp

$$\frac{5^2 \times 21 \times 6^5 - 5^8}{6^8},$$

en dus ontvangen voor  $m$  worpen alle spelers tezamen waarschijnlijk

$$\frac{5^2 \times 21 \times 6^5 - 5^8}{6^8} m.$$

Zij moeten evenwel allen aan het huis betalen; en zal het spel eerlijk zijn, dan moet de inzet gelijk zijn aan de waarschijnlijke winst; en hetgeen de bezitter van het huis waarschijnlijk ontvangt, moet gelijk zijn aan hetgeen hij voor het huis gegeven heeft, dus moet

$$\frac{5^2 \times 21 \times 6^5 - 5^8}{6^8} m - H_u = I.$$

De waarschijnlijke winst voor den bezitter van den schimmel is bij elken worp  $\frac{6^2 \times 5^6}{6^8}$ , daar hij altijd slechts 1 penning ontvangt; en dus moet

$$S = \frac{6^2 \times 5^6}{6^8} m.$$

Voor de klok vindt men

$$K = \frac{5 \times 21 \times 6^5 - 5^7}{6^8} m;$$

voor den hamer eveneens

$$H = \frac{5 \times 21 \times 6^5 - 5^7}{6^8} m;$$

en voor de klok en hamer

$$K_h = \frac{21 \times 6^6 - 5^8}{6^8} m.$$

Reeds dadelijk blijkt hieruit, dat de koop prijs der kaarten met de klok en met den hamer 5 maal grooter moet zijn, dan die van de kaart met de klok en hamer; en verder, dat de inzet van alle spelers is

$$I' = 25 K_h - H_u,$$

en

$$m = \frac{6^8}{21 \times 6^5 - 5^6} K_h;$$

dus

$$S = \frac{5^6 \times 6^2}{21 \times 6^5 - 5^6} K_h = \frac{562500}{147671} K_h,$$

of

$$S = 3,8 K_h \text{ omstreeks;}$$

en de kas moet zijn

$$P = 25 K_h - H_u + 3,8 K_h + 11 K_h + H_u,$$

of

$$P = 39,8 K_h \text{ omstreeks.}$$

Hoe groot de inzet en hoe groot de verkoopprijs der overige kaarten ook zijn mogen, de waarschijnlijke winst van het huis is altijd standvastig. Meestal worden de kaarten met den schimmel en met het huis duurder verkocht dan de overigen.

Voor den schimmel is dit, zooals hierboven bleek, onjuist, en het groote voordeel, dat de schimmel oplevert, is waarschijnlijk het gevolg van de onzuiverheid der dobbelsteen. Deze toch laten meestal veel te wenschen over.

Er rest ons nog de waarschijnlijkste winst voor den bezitter van het huis te bepalen. Gaan wij de tabel, die de kans voor elk getal van 1 tot 21 aangeeft, na, zoo zien wij, dat hoe grooter de rest in de kas is, hoe minder kans op winst er voor het huis bestaat, want dan zal de kas spoedig vermindert worden. De kans op winst blijft nog zeer gering, wanneer 3, 4 of 5 penningen in de kas overblijven, en wij zullen slechts het geval nagaan, dat er 1 penning in de kas blijft.

De kans om 1 te werpen is  $\frac{5^5}{6^5 - 5^5}$ ; bijgevolg wordt waarschijnlijk in  $\frac{6^5 - 5^5}{5^5}$  worpen een 1 geworpen. Werden er  $6^5 - 5^5$  worpen gedaan, dan zou het huis ontvangen  $21 \times 6^5 - (6^5 - 5^5) = 131265$  penningen; bijgevolg is de waarschijnlijkste winst voor het huis in één worp  $\frac{131265}{6^5 - 5^5}$  en dus voor  $\frac{6^5 - 5^5}{5^5}$  worpen  $\frac{131265}{5^5}$  of 42.

Nemen wij nu  $H = 42$ , dan hebben wij  $n I = 25 K - 42$ ; zijn er nu bij voorbeeld twaalf spelers en zet ieder 9 penningen in, dan is  $K = 6$ ;  $K = H = 30$ ;  $S = 23$  en de kas = 239 penningen.

---



# OVER DE MEETKUNDIGE VOORSTELLING VAN IMAGINAIRE PUNTEN IN DE RUIMTE,

DOOR

**Dr. P. MOLENBROEK.**

---

Het begrip van een reëel punt, kortweg punt genoemd, behoort zeker wel tot de oudste, die in de wiskunde voorkomen. Immers reeds in de eerste beginselen der planimetrie kan men dat begrip vinden, en aan deze tak der wiskundige wetenschap mag toch voorzeker een hooge ouderdom worden toegeschreven. Er volgt hieruit, dat het een zuiver meetkundig begrip is. Eerst DESCARTES bracht het met stelkundige grootheden in verband en vormde daardoor den grondslag voor de analytische meetkunde.

Het vinden van een punt, dat aan bepaalde vooraf gestelde voorwaarden voldoet, wordt hierbij tot het oplossen eener vergelijking teruggebracht. Een stelkundige vergelijking nu kent in het algemeen reële en complexe wortels. De reële wortels komen overeen met reële punten der meetkunde.

Op het gebied der zuivere meetkunde placht men in het geval van complexe wortels te zeggen, dat geen punt bestond, dat aan de gestelde voorwaarden voldeed. Vóór den tijd van DESCARTES moet men zich dan ook bij het toenmalige standpunt van ontwikkeling der stelkunde denken, dat een vergelijking met complexe wortels beschouwd werd als een zoodanige, waaraan geen enkele waarde voor de onbekende voldeed.

Sedert is de ontwikkeling van meetkunde en stelkunde hand

aan hand gegaan. De meetkunde werd bijna uitsluitend langs de analytische methode bestudeerd, en eerst aan onze eeuw was het voorbehouden een zelfstandige methode van onderzoek voor de meetkunde op te sporen.

In den tijd, waarin de stekunde en de meetkunde tezamen zich ontwikkelden, valt de invoering der imaginaire getallen in de stekunde, en in verband hiermede onderging de theorie der vergelijkingen belangrijke uitbreiding. Een der gewichtigste stappen was voorzeker het bewijs der stelling, dat elke  $n^{\text{de}}$  machtsvergelijking ook  $n$  wortels heeft, reëel of complex. Door den nauwen samenhang tusschen stekunde en meetkunde nu was men daardoor ook wel genoodzaakt de spreekwijze in te voeren, dat een dergelijke vergelijking ook steeds  $n$  punten voorstelt, sommige reëel en andere, die men imaginaire punten noemde, zonder dat echter eenig meetkundig begrip met deze laatste verbonden was.

Sedert dien tijd heeft in de meetkunde de uitdrukking »imaginair punt» het burgerrecht verkregen, en zij zou tegenwoordig moeilijk daaruit gemist kunnen worden. Toch is het tot nog toe een uitsluitend stekundig begrip. Het is hiermede juist tegenovergesteld, als met de uitdrukking »reëel punt», die, oorspronkelijk een zuiver meetkundig begrip vertegenwoordigende, later een plaats in de stekunde veroverde.

Het is nu de vraag: kan met het aan de stekunde ontleende begrip »imaginair punt» ook eene meetkundige voorstelling verbonden worden? In de keuze daarvan is men betrekkelijk vrij; het zullen daarom vooral de natuurlijkheid en de eenvoudigheid in de toepassing der gekozen voorstelling zijn, die over de waarde van deze zullen moeten beslissen. Het doel van dit opstel is op de bovenstaande vraag een bevredigend antwoord te geven.

---

Onderstellen wij, dat in de ruimte een willekeurig recht-hoekig cöordinatenstelsel aangenomen is, en geven wij twee imaginaire punten ten opzichte daarvan door de complexe cöördinaten

$$x_1 + x_2 \sqrt{-1}, \quad y_1 + y_2 \sqrt{-1}, \quad z_1 + z_2 \sqrt{-1}; \dots (1)$$

$$x'_1 + x'_2 \sqrt{-1}, \quad y'_1 + y'_2 \sqrt{-1}, \quad z'_1 + z'_2 \sqrt{-1}. \dots (2)$$

De grondslag van onze beschouwingen wordt gevormd door de navolgende bepaling:

De afstand der beide imaginaire punten is de grootte  $d$ , welke voldoet aan de vergelijking

$$d^2 = [x_1 - x'_1 + \sqrt{-1}(x_2 - x'_2)]^2 + [y_1 - y'_1 + \sqrt{-1}(y_2 - y'_2)]^2 + [z_1 - z'_1 + \sqrt{-1}(z_2 - z'_2)]^2 \quad (3)$$

Zoeken wij nu de reële punten, welke van het imaginaire punt (1) een afstand nul hebben. Noemen wij  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , de reële coördinaten van een dier punten, dan moet dus de betrekking gelden

$$(\xi - x_1 - x_2 \sqrt{-1})^2 + (\eta - y_1 - y_2 \sqrt{-1})^2 + (\zeta - z_1 - z_2 \sqrt{-1})^2 = 0, \quad (4)$$

welke onmiddellijk uiteenvalt in de beide navolgende

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \quad (5)$$

en

$$(\xi - x_1)x_2 + (\eta - y_1)y_2 + (\zeta - z_1)z_2 = 0. \dots (6)$$

De eerste dezer vergelijkingen geeft te kennen, dat de punten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  gelegen zijn op een bol om het reële punt  $x_1, y_1, z_1$ , of  $P_1$  beschreven met den straal

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2};$$

terwijl de vergelijking (6) uitdrukt, dat die punten liggen in een plat vlak, gaande door het middelpunt van den zoo-even genoemden bol en loodrecht staande op de lijn, die den coördinaatoorsprong  $O$  met het reële punt  $x_2, y_2, z_2$  of  $P_2$  verbindt.

Het vorige kan aldus samengevat worden: De reële punten, die een afstand nul van het imaginaire punt (1) hebben, vormen een cirkel, beschreven om het punt  $P_1$  als middelpunt in een vlak loodrecht staande op  $OP_2$  met een straal gelijk aan de lengte van  $OP_2$ .

Waar wij in het vervolg over een imaginair punt  $P$  handelen, zullen wij de letters  $P_1$  en  $P_2$  ook steeds met de hier aangegeven beteekenis gebruiken.

Als meetkundige voorstelling van een imaginair punt zullen wij kiezen de meetkundige

plaats der reële punten, die van het imaginaire punt een afstand nul hebben.

Volgens het voorafgaande is deze meetkundige voorstelling dan een cirkel. Het middelpunt  $P_1$ , den straal en het vlak van dezen cirkel zullen wij ook tevens het middelpunt, den straal en het vlak van het imaginaire punt noemen. Trekt men uit  $P_1$  een lijn  $P_1 P'$ , welke in grootte en richting met  $O P_2$  overeenstemt, dan zullen wij deze de normaal tot het imaginaire punt noemen. De coördinaten van dit alzoo verkregen punt  $P'$  zullen zijn

$$x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2.$$

In het verdere zal dit punt somtijds de *pool* van het imaginaire punt genoemd worden.

Wij zullen nog vaststellen, dat bij het bepalen der normaal van een imaginair punt het teeken der grootheden  $x_2, y_2, z_2$  in rekening gebracht zal worden, zoodat de normaal van het tot het punt (1) toegevoegde imaginaire punt, dat de coördinaten

$$x_1 - x_2 \sqrt{-1}, y_1 - y_2 \sqrt{-1}, z_1 - z_2 \sqrt{-1}, \dots (7)$$

heeft, in grootte gelijk doch in richting tegengesteld is aan die van het punt (1).

Dientengevolge zullen ook de polen der punten (1) en (7) niet overeenstemmen; de pool van het laatstgenoemde punt heeft namelijk tot coördinaten

$$x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2.$$

Overigens worden de beide imaginaire punten (1) en (7) door volkomen denzelfden cirkel voorgesteld, daar de vergelijkingen (5) en (6) niet veranderen, als men  $x_2, y_2, z_2$  door  $-x_2, -y_2, -z_2$  vervangt.

Het verschil in normaal en in pool tusschen twee toegevoegde imaginaire punten kan nu ook aangewend worden om een onderscheid in de meetkundige voorstelling te verkrijgen.

Wij zullen namelijk aannemen, dat bij den cirkel, die een imaginair punt voorstelt, een pijl geplaatst wordt, welke de richting aanduidt, waarin de cirkel doorloopen gedacht wordt; en wel worde die pijl steeds zoodanig aangebracht, dat de door haar voorgestelde draaiing van uit de pool van het imaginaire punt gezien in positieven zin — dat is overeen-

stemmende met de beweging der wijzers van een uurwerk — plaats heeft. Door deze aanname zullen de pijlen, bij twee toegevoegde imaginaire punten geplaatst, tegenovergestelde richting moeten hebben.

Een cirkel, die slechts in ééne richting doorloopen gedacht wordt, is *cycle* genoemd. Volledig kan men daardoor het vorige aldus samenvatten:

Het imaginaire punt met de coördinaten

$$x_1 + x_2 \sqrt{-1}, y_1 + y_2 \sqrt{-1}, z_1 + z_2 \sqrt{-1},$$

wordt voorgesteld door een cycle, beschreven om het punt  $x_1, y_1, z_1$  als middelpunt met een straal gelijk aan de lengte van de lijn, die den coördinaat-oorsprong met het punt  $x_2, y_2, z_2$  verbindt, in een vlak loodrecht staande op die lijn, terwijl de draaiingsrichting van den cycle zich, van uit het punt

$$x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2$$

gezien, als eene positieve voordoet.

Twee toegevoegde imaginaire punten vormen tezamen een in beide richtingen doorloopen cirkel.

Met behulp der voorafgaande begrippen is het nu mogelijk de imaginaire punten van de bekende oppervlakken en lijnen nader te onderzoeken. Maar wij zijn verder ook in staat eene bepaalde meetkundige voorstelling te verbinden met vergelijkingen, waarin de coëfficiënten der veranderlijke coördinaten  $x, y, z$  complex zijn. Wij zullen ons eerst bepalen tot eenige beschouwingen, die tot de oplossing der eerste opgave bijdragen.

Zijn bijvoorbeeld de imaginaire punten gevraagd, welke tot het platte vlak

$$ax + by + cz + d = 0 \dots \dots \dots (8)$$

behooren, waarin  $a, b, c, d$  reëel ondersteld worden.

Worden door (1) de coördinaten van een zoodanig imaginair punt voorgesteld, dan geeft de substitutie dier waarden in de vergelijking (8)

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \text{ en } ax_2 + by_2 + cz_2 = 0. \quad (9)$$

De middelpunten der imaginaire punten van een plat vlak liggen volgens de eerste dezer vergelijkingen in het vlak zelf; en de tweede vergelijking geeft te kennen, dat de normaal tot elk imaginair punt in het gegeven vlak ligt en onbepaalde

lengte heeft; zoodat het vlak van het imaginaire punt loodrecht op het gegeven vlak staat, en zijn straal willekeurig genomen worden kan.

Nemen wij verder de ellipsoïde

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1, \dots \dots \dots (10)$$

waarin  $a, b, c$  dus reëel en positief ondersteld worden. De substitutie der waarden (1) in de vergelijking (10) geeft

$$\left. \begin{aligned} a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 - 1 &= a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2, \\ \text{en} \quad a x_1 x_2 + b y_1 y_2 + c z_1 z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

Uit de tweede dezer betrekkingen volgt, dat de richting der normaal tot een imaginair punt toegevoegd is tot de richting van de middellijn der ellipsoïde, die naar het middelpunt van het imaginaire punt getrokken wordt. Uit de eerste betrekking volgt, omdat  $a, b, c$  positief zijn, dat

$$a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 > 1,$$

zoodat de middelpunten der imaginaire punten alle buiten de ellipsoïde gelegen moeten zijn. Verder blijkt uit diezelfde vergelijking, dat bij een gegeven middelpunt voor het imaginaire punt oneindig vele normalen behooren kunnen, welke uiteinden tot meetkundige plaats hebben een ellipsoïde, die evenwijdig aan de gegebene geplaatst en daarmede gelijkvormig is, terwijl de gelijkvormigheidsfactor

$$\sqrt{a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 - 1},$$

bedraagt.

Nu is evenwel gemakkelijk aan te toonen, dat deze grootheid gelijk is aan de verhouding der lengte van een willekeurige raaklijn uit het punt  $x_1, y_1, z_1$  aan de ellipsoïde getrokken tot die van een halve middellijn, evenwijdig aan die raaklijn loopende.

Heeft men dus buiten de ellipsoïde een willekeurig punt  $P_1$  tot middelpunt van een imaginair punt gekozen, dan construeere men de doorsnede van de ellipsoïde met het middenvlak, dat tot de naar  $P_1$  gaande middellijn verwant is, en verlengte elken radiusvector dezer doorsnede in de verhouding door den hierboven genoemden gelijkvormigheidsfactor aangegeven. Alle zoo verkregene radiivectores kunnen dan

als normaal tot een imaginair punt met het middelpunt  $P_1$  dienst doen.

Men kan hieruit nog besluiten, dat het vlak van een imaginair punt van een bol de middellijn van den bol bevat, die naar het middelpunt van het imaginaire punt gaat, en dat de straal van dit laatste gelijk is aan de lengte van de raaklijn uit zijn middelpunt aan den bol getrokken.

Eene rechte lijn, door twee lineaire vergelijkingen bepaald, geeft aanleiding tot twee stelsels van vergelijkingen, elk van den vorm (9). Hieruit kan men besluiten, dat de middelpunten der imaginaire punten eener rechte lijn op deze zelve gelegen zijn, en dat de normalen in richting met de gegevene lijn samenvallen moeten.

De imaginaire punten eener rechte lijn zijn derhalve cirkels in vlakken loodrecht op die lijn staande om elk harer punten als middelpunt met willekeurigen straal beschreven.

Nemen wij nu nog het algemeene geval, dat

$$f(x, y, z) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

als vergelijking van een reëel oppervlak gegeven is, zoodat alle in de functie  $f$  voorkomende standvastigen reëel zijn. Bij de onderstelling, dat  $f$  volgens het theorema van TAYLOR kan ontwikkeld worden en dat men de schrijfwijze  $\Delta^s f$  in plaats van de symbolische differentiatie

$$\left( x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^s f(x_1, y_1, z_1)$$

invoert, zal de substitutie der waarden (1) voor  $x, y, z$  in de vergelijking (12) na de scheiding van het reële en het imaginaire gedeelte opleveren

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2} \Delta^2 f + \frac{1}{2.3.4} \Delta^4 f - \dots = 0, \\ \Delta f - \frac{1}{2.3} \Delta^3 f + \frac{1}{2.3.4.5} \Delta^5 f - \dots = 0. \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

Uit den vorm dezer betrekkingen blijkt onmiddellijk, dat steeds de beide stellen waarden  $+x_2, +y_2, +z_2$  en  $-x_2, -y_2, -z_2$  tegelijkertijd voldoen. De imaginaire punten bij een reëel oppervlak komen derhalve steeds paarsgewijze toegevoegd voor.

Heeft men met een reële kromme te doen, dan voldoen

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  aan twee stelsels van vergelijkingen, elk van den vorm (13). Tusschen deze vier vergelijkingen kunnen dan of  $x_1, y_1, z_1$  of  $x_2, y_2, z_2$  geëlimineerd worden.

In het eerste geval verkrijgt men de meetkundige plaats van het bij elk imaginair punt P behorende punt  $P_2$ , die wij zullen noemen de meetkundige plaats der eindpunten van de coïnitiale normalen der imaginaire punten.

In het tweede geval wordt de meetkundige plaats der middelpunten van alle tot de kromme lijn behorende imaginaire punten verkregen.

Is de kromme lijn een vlakke, zoodat een der beide stelsels vergelijkingen van den vorm (13) de gedaante (9) aanneemt, dan zullen algemeen de middelpunten der imaginaire punten alle in het vlak der gegevene kromme liggen, en tevens de vlakken der imaginaire punten loodrecht op het vlak der kromme staan.

Wij gaan nu over tot de meetkundige interpretatie van vergelijkingen met complexe coëfficiënten.

Een vergelijking van den  $n^{\text{de}}$  graad in  $x, y, z$ , waarvan alle coëfficiënten complex zijn, zullen wij de algemeene vergelijking van den  $n^{\text{de}}$  graad noemen. Wij zullen verder de spreekwijze behouden, dat ééne zoodanige vergelijking een oppervlak van de  $n^{\text{de}}$  orde voorstelt, en dat twee zoodanige vergelijkingen eene kromme lijn voorstellen. Ter onderscheiding van de reële oppervlakken en krommen zullen wij de nu beschouwde algemeene oppervlakken en krommen noemen.

Zoo kunnen wij dus van een algemeen oppervlak van den tweeden graad, van een algemeen plat vlak en van een algemeene rechte lijn spreken. Allereerst springt in het oog, dat de imaginaire punten van algemeene kromme lijnen en oppervlakken niet meer paarwijze toegevoegd voorkomen. Maar verder zal bij de algemeene krommen eene meetkundige plaats der middelpunten van imaginaire punten en ook eene meetkundige plaats der eindpunten van coïnitiale normalen bestaan blijven.

Eenigszins in het bijzonder zullen wij den aard van het algemeene platte vlak en van de algemeene rechte lijn nagaan.

Zij daartoe voor het eerste gegeven de vergelijking



$$ax + by + cz + d = 0, \dots \dots \dots (14)$$

waarin de coëfficiënten  $a, b, c, d$  van den vorm  $a_1 + a_2\sqrt{-1}$ , enzovoort ondersteld worden. Zullen nu voor  $x, y, z$  de complexe waarden (1) voldoen, dan moeten de beide betrekkingen gelden

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1 &= a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2, \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 + d_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \cdot (15)$$

Deze twee vergelijkingen met zes veranderlijken veroorloven de laatste met behulp van vier willekeurige veranderlijken  $m, n, u, v$  uit te drukken, als

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= m(a_1 B - a_2 A) + \left(n - \frac{d_1}{AC - B^2}\right)(a_1 C - a_2 B) + u(b_1 c_2 - b_2 c_1), \\ y_1 &= m(b_1 B - b_2 A) + \left(n - \frac{d_1}{AC - B^2}\right)(b_1 C - b_2 B) + u(c_1 a_2 - c_2 a_1), \\ z_1 &= m(c_1 B - c_2 A) + \left(n - \frac{d_1}{AC - B^2}\right)(c_1 C - c_2 B) + u(a_1 b_2 - a_2 b_1); \end{aligned} \right\} \cdot (16)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \left(m - \frac{d_2}{AC - B^2}\right)(a_1 C - a_2 B) - n(a_1 B - a_2 A) + v(b_1 c_2 - b_2 c_1), \\ y_2 &= \left(m - \frac{d_2}{AC - B^2}\right)(b_1 C - b_2 B) - n(b_1 B - b_2 A) + v(c_1 a_2 - c_2 a_1), \\ z_2 &= \left(m - \frac{d_2}{AC - B^2}\right)(c_1 C - c_2 B) - n(c_1 C - c_2 A) + v(a_1 b_2 - a_2 b_1); \end{aligned} \right\} \cdot (17)$$

waarin kortheidshalve

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = A, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = B, \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = C \quad (18)$$

gesteld is. Hieruit blijkt nu allereerst, dat de richting  $V$ , — welker cosinussen evenredig zijn aan

$$b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad c_1 c_2 - c_2 a_1, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

en welke loodrecht staat op de beide richtingen met coëfficiënten evenredig aan  $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$  — tot het algemeene vlak in een belangrijke betrekking staat.

Immers, als wij de punten  $x_1, y_1, z_1$  en  $x_2, y_2, z_2$  evenals in het begin dezer verhandeling door  $P_1$  en  $P_2$  voorstellen, dan blijkt uit de beide stelsels van vergelijkingen (16) en (17), dat voor elk bepaald punt  $P_1$  — dus voor eene bepaalde waarde van  $m, n, u$  — de meetkundige plaats van  $P_2$  een bepaalde rechte lijn evenwijdig aan de richting  $V$  is, en verder, dat wanneer het punt  $P_1$  zich evenwijdig aan de

richting  $V$  verplaatst, zoodat alleen  $u$  verandert, de bij  $P_1$  behorende meetkundige plaats van het punt  $P_1$  geen verandering ondergaat, Wanneer wij verder stellen

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= m(a_1 B - a_2 A) + n(a_1 C - a_2 B), \\ \eta_1 &= m(b_1 B - b_2 A) + n(b_1 C - b_2 B), \\ \zeta_1 &= m(c_1 B - c_2 A) + n(c_1 C - c_2 B), \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= m(a_1 C - a_2 B) - n(a_1 B - a_2 A), \\ \eta_2 &= m(b_1 C - b_2 B) - n(b_1 B - b_2 A), \\ \zeta_2 &= m(c_1 C - c_2 B) - n(c_1 B - c_2 A), \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

dan blijkt onmiddellijk uit (16) en (17), dat de punten met de coördinaten

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{a_1 C - a_2 B}{A C - B^2} d_1, \quad y_1 + \frac{b_1 C - b_2 B}{A C - B^2} d_1, \quad z_1 + \frac{c_1 C - c_2 B}{A C - B^2} d_1, \\ x_2 + \frac{a_1 C - a_2 B}{A C - B^2} d_2, \quad y_2 + \frac{b_1 C - b_2 B}{A C - B^2} d_2, \quad z_2 + \frac{c_1 C - c_2 B}{A C - B^2} d_2, \end{aligned}$$

op een vlak, loodrecht op de richting  $V$  gebracht, geprojecteerd worden in de punten  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ . Tusschen deze beide punten, die wij  $Q_1$  en  $Q_2$  zullen noemen, bestaat een eenvoudige verwantschap.

Van de beide termen toch, die in de uitdrukkingen (19) en (20) voor de coördinaten dier punten voorkomen, kan men de eerste beschouwen als de projecties op de coördinaatassen van een willekeurig segment eener rechte lijn in de richting, welker coëfficiënten evenredig zijn aan

$$a_1 B - a_2 A, \quad b_1 B - b_2 A, \quad c_1 B - c_2 A, \quad \dots (21)$$

getrokken en de tweede termen eveneens als de projecties van een segment in de richting met cosinussen evenredig aan

$$a_1 C - a_2 B, \quad b_1 C - b_2 B, \quad c_1 C - c_2 B, \quad \dots (22)$$

Deze beide vaste richtingen staan loodrecht op de richting  $V$ , welke wij zooeven invoerden, zooals men onmiddellijk door middel van de richtingscoëfficiënten aantoot. De lengte der beide segmenten bedraagt respectievelijk

$$\begin{aligned} m\sqrt{(a_1 B - a_2 A)^2 + (b_1 B - b_2 A)^2 + (c_1 B - c_2 A)^2} &= m\sqrt{A(AC - B^2)}, \\ n\sqrt{(a_1 C - a_2 B)^2 + (b_1 C - b_2 B)^2 + (c_1 C - c_2 B)^2} &= n\sqrt{C(AC - B^2)}. \end{aligned}$$

Trekken wij nu uit den coördinaat-oorsprong  $O$  twee segmenten  $OM$  en  $ON$  in de richtingen door (21) en (22) aangegeven, welker lengten respectievelijk  $\sqrt{A(AC - B^2)}$

en  $\sqrt{C(A^2 - B^2)}$  bedragen. Nemen wij verder in dezelfde richtingen twee geheel willekeurige segmenten  $OA_1$  en  $OB_1$  en construeeren wij hierop een parallelogram, dan zal het vierde hoekpunt daarvan als het punt  $Q_1$  beschouwd kunnen worden.  $Q_2$  is nu gemakkelijk te vinden; want als de lijnen, uit  $Q_2$  evenwijdig aan  $OM$  en  $ON$  getrokken, de rechten  $ON$  en  $OM$  achtereenvolgens in  $B_2$  en  $A_2$  ontmoeten, dan is

$$\frac{OA_1}{OM} = m, \quad \frac{OB_1}{ON} = n, \quad \frac{OA_2}{OM} = -n, \quad \frac{OB_2}{ON} = m.$$

Neemt men nu op  $OM$  een punt  $A'_2$  aan zoodanig, dat  $OA'_2 = -OA_2$ , dan is dus

$$\frac{OA'_2}{OM} = n,$$

en daarom in verband met de vorige betrekkingen

$$\frac{OA'_2}{OB_1} = \frac{OM}{ON} = \frac{OA_1}{OB_2},$$

zoodat men besluiten kan

$$B_1 A'_2 \parallel MN \parallel B_2 A_1.$$

Hierdoor kunnen uit  $A_1$  en  $B_1$  de punten  $A'_2$  en  $B_2$  onmiddellijk gevonden worden. Neemt men dan nog  $OA_2 = -OA'_2$ , dan is het vierde hoekpunt van het parallelogram, op  $OA_2$  en  $OB_2$  geconstrueerd, het verlangde punt  $Q_2$ .

Heeft men op deze wijze twee bij elkander behoorende punten  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$  bepaald, dan zijn  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$  verder gemakkelijk te vinden. Uit  $Q_1$  namelijk trekke men een vektor, welks projecties op de coördinaatassen

$$-d_1 \frac{a_1 C - a_2 B}{A C - B^2}, \quad -d_1 \frac{b_1 C - b_2 B}{A C - B^2}, \quad -d_1 \frac{c_1 C - c_2 B}{A C - B^2},$$

bedragen, zoodat de lengte van dien vektor gelijk is aan

$$d_1 \sqrt{\frac{A}{A C - B^2}},$$

en zijne richting loodrecht is op de beide richtingen  $V$  en  $a_1, b_1, c_1$ . Evenzoo trekke men uit  $Q_2$  een vektor van de lengte

$$d_2 \sqrt{\frac{A}{A C - B^2}},$$

in dezelfde richting.

Wanneer nu ten slotte uit de eindpunten der aldus ge-

construeerde vektoren lijnen evenwijdig aan de richting  $V$  getrokken worden, dan zullen alle punten van deze aan de vergelijkingen (16) en (17) voldoen.

Bij elk willekeurig punt in de ruimte, als middelpunt van een imaginair punt beschouwd, behoort derhalve een oneindig aantal normalen, welker uiteinden eene bepaalde rechte lijn, evenwijdig aan de richting  $V$ , opleveren.

Een belangrijk bijzonder geval is dat, waarbij de coëfficiënten  $a, b, c$  van de vergelijking (14) reëel en  $d$  zuiver imaginair is. Men heeft dan slechts in (15) en (16)

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_1 = 0$$

aan te nemen, zoodat verkregen wordt

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 &= 0, \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (23)$$

De meetkundige plaats der middelpunten van de imaginaire punten is derhalve nu het platte vlak door den coördinaat-oorsprong loodrecht op de richting  $a_1, b_1, c_1$  aangebracht; terwijl voor elk in dit vlak gekozen middelpunt van een imaginair punt de uiteinden der daarbij behoorende normalen een ander standvastig plat vlak vormen, evenwijdig aan het eerste op een afstand

$$- \frac{d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

aangebracht.

Gaan wij ten slotte over tot de beschouwing der algemeene rechte lijn, die door de beide vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0, \\ ex + fy + gz + h &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (24)$$

bepaald wordt, waarbij  $a, b, c, d, e, f, g, h$  complex ondersteld zijn. Ter oplossing dezer vergelijkingen zullen wij niet onmiddellijk de reële grootheden van de imaginaire scheiden, daar deze methode tot te ingewikkelde vormen leidt. Men kan door middel van de betrekkingen (24) gemakkelijk  $x, y, z$  op symmetrische wijze in ééne complexe veranderlijke  $u$  uitdrukken, aldus:

$$\left. \begin{aligned} x &= (bg - cf)u + [(b - c)h - (f - g)d] \Delta, \\ y &= (ce - ag)u + [(c - a)h - (g - c)d] \Delta, \\ z &= (af - be)u + [(a - b)h - (e - f)d] \Delta, \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

wanneer ter bekorting

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (26)$$

gesteld is.

Daaruit volgt dan echter, dat in het algemeen het drietal vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} x &= a u + d, \\ y &= b u + e, \\ z &= c u + f, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

waarin  $a, b, c, d, e, f, u$  complexe grootheden voorstellen, als bij eene algemeene rechte lijn behoorende beschouwd kunnen worden; en de scheiding der reële en imaginaire grootheden in die vergelijkingen geeft daarna aanleiding tot de beide navolgende stelsels van vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 u_1 - a_2 u_2 + d_1, \\ y_1 &= b_1 u_1 - b_2 u_2 + e_1, \\ z_1 &= c_1 u_1 - c_2 u_2 + f_1, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= a_1 u_2 + a_2 u_1 + d_2, \\ y_2 &= b_1 u_2 + b_2 u_1 + e_2, \\ z_2 &= c_1 u_2 + c_2 u_1 + f_2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

De eliminatie van  $u_1$  en  $u_2$  tusschen het eerste stel en ook tusschen het tweede stel van vergelijkingen doet nu onmiddellijk zien, dat de meetkundige plaatsen der punten  $x_1, y_1, z_1$  of  $P_1$  en  $x_2, y_2, z_2$  of  $P_2$  twee platte vlakken zijn, beide loodrecht staande op de richting, met cosinussen evenredig aan

$$b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad c_1 a_2 - c_2 a_1, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1, \dots \dots (30)$$

en derhalve evenwijdig.

Stelt men hier

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a_1 u_1 - a_2 u_2, \\ \eta_1 &= b_1 u_1 - b_2 u_2, \\ \zeta_1 &= c_1 u_1 - c_2 u_2; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= a_1 u_2 + a_2 u_1, \\ \eta_2 &= b_1 u_2 + b_2 u_1, \\ \zeta_2 &= c_1 u_2 + c_2 u_1; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

dan is duidelijk, dat tusschen de punten  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  of  $Q_1$  en  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  of  $Q_2$  een verwantschap bestaat van denzelfden aard als die, welke wij bij het algemeene platte vlak tusschen

de door de vergelijkingen (19) en (20) bepaalde punten vonden.

Om een algemeene rechte lijn te construeeren, ga men derhalve als volgt te werk: Men bepale de beide richtingen met coëfficiënten evenredig aan de grootheden  $a_1, b_1, c_1$ ;  $a_2, b_2, c_2$  respectievelijk, die in de vergelijkingen (28) en (29) voorkomen. Door den coördinatenoorsprong bringe men een vlak aan evenwijdig aan deze beide richtingen, dat is loodrecht op de in (30) bedoelde richting. In dit vlak construeere men volgens de figuur twee verwante punten  $Q_1$  en  $Q_2$ . Uit het eerste dezer punten trekke men een vektor met de componenten  $d_1, e_1, f_1$  volgens de coördinaatassen; uit het tweede een vektor met de componenten  $d_2, e_2, f_2$ . De eindpunten dezer vektoren zijn dan de bij een imaginair punt  $P$  behorende punten  $P_1$  en  $P_2$ . Elk middelpunt van een imaginair punt eener algemeene rechte lijn laat dus slechts één normaal tot dat punt toe en omgekeerd.

---

Tot de hiervoor medegedeelde uitkomsten was ik gekomen in verband met de theorie der quaternionen. In een vergadering van leden van het Wiskundig genootschap onder de zinspreuk „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven” te Amsterdam had ik de eer eenige dier uitkomsten in het licht der genoemde theorie voor te dragen.

Tengevolge van eenige opmerkingen van Prof. D. J. KORTWEG besloot ik te trachten, deze beschouwingen van de leer der quaternionen los te maken.

In dezelfde vergadering reeds werd door ZHGel. het denkbeeld geopperd om het in deze verhandeling vooropgestelde beginsel aan te wenden, ten einde tot eene meetkundige voorstelling van imaginaire punten te geraken, echter zonder dat wij toen vermoedden, dat deze weg tot dezelfde uitkomsten voeren zou, welke ik reeds door toepassing van begrippen, aan de theorie der quaternionen ontleend, verkregen had. Het zij mij vergund aan ZHGel. voor de genoemde opmerkingen mijnen dank te brengen.

In het volgende moge nog beknopt worden aangegeven

in welk verband het voorafgaande tot de theorie der quaternionen staat.

Wanneer  $x, y, z$  de rechthoekige coördinaten van een punt  $P$  zijn,  $i, j, k$  eenheidsvectoren in de richting der coördinaatassen, dan is de vektor van  $P$  de uitdrukking

$$\rho = x i + y j + z k, \dots \dots \dots (33)$$

Zijn nu  $x, y, z$  complex als in (1), dan neemt deze vektor den vorm aan

$$\rho = x_1 i + y_1 j + z_1 k + \sqrt{-1} (x_2 i + y_2 j + z_2 k),$$

hetgeen een uitdrukking van den vorm

$$\rho = \alpha + \sqrt{-1} \beta, \dots \dots \dots (34)$$

oplevert, als men ter bekorting de reële vectoren  $\alpha, \beta$  invoert, die bepaald worden door de vergelijkingen

$$x_1 i + y_1 j + z_1 k = \alpha, \quad x_2 i + y_2 j + z_2 k = \beta. \dots (35)$$

Een vektor van den in (34) aangegeven vorm is door HAMILTON bivector genoemd.

Uit het voorafgaande volgt nu, dat een bivector een imaginair punt in de ruimte voorstelt. Daarbij is dan  $\alpha$  de vektor van het punt met de coördinaten  $x_1, y_1, z_1$ , dus van het middelpunt  $P_1$  van het imaginaire punt  $P$ . Evenzoo is  $\beta$  de vektor van het bij  $P$  behorende punt  $P_2$  met de coördinaten  $x_2, y_2, z_2$ , zoodat de vektor  $\beta$  in grootte en richting de normaal tot het imaginaire punt blijkt voor te stellen.

Nu doet zich de vraag voor, hoe dan bij deze interpretatie de werking van het symbool  $\sqrt{-1}$  op den vektor  $\beta$  in eene uitdrukking van den vorm (34) moet verklaard worden.

De vektor  $\rho$  in (34) is volgens het vorige veelwaardig; hij verbindt namelijk den vektorenoorsprong met elk punt van den cirkel, die om het uiteinde van den vektor  $\alpha$  in een vlak loodrecht op  $\beta$  met een straal gelijk aan de lengte van  $\beta$  beschreven wordt. Alle deze vectoren tezamen vormen de beschrijvende lijnen van een scheeven kegel van de tweede orde, dien wij *vektorkegel* zullen noemen.

De uitdrukking  $\sqrt{-1} \beta$  moet ook een veelwaardige zijn. Wanneer men  $\alpha + \sqrt{-1} \beta$  bepaalt als het gevolg der optelling van den vektor  $\alpha$  met elk der in de uitdrukking  $\sqrt{-1} \beta$  bevatte vectoren, dan volgt hieruit, dat  $\sqrt{-1} \beta$  elken straal voorstelt van den cirkel, dien wij het imaginaire punt

noemden. Alle deze stralen tezamen kunnen wij een *vektorcirkel* noemen.

Het gevolg der aanwending van het symbool  $\sqrt{-1}$  op een vektor  $\beta$  is derhalve, dat uit dien vektor een vektorcirkel ontstaat, namelijk de verzameling van alle stralen van een cirkel, die in een vlak loodrecht op  $\beta$  staande met een straal gelijk aan de lengte van  $\beta$  beschreven wordt.

Nu is door HAMILTON reeds aangegeven, dat  $\sqrt{-1}$  een rechte versor zijn moet. Uit het vorige blijkt echter, dat wij onder  $\sqrt{-1}$  niet één enkelen rechten versor verstaan, maar alle mogelijke rechte versoren tezamen, die in verschillende vlakken op een vektor werken kunnen. Deze beteekenis is dan ook natuurlijk. Immers geen enkel door  $\beta$  gaand vlak kan eenigen voorkeur hebben boven de andere vlakken, die  $\beta$  bevatten, zoodat, als een draaiing van  $90^\circ$  plaats grijpen moet, alle vlakken tezamen daartoe in aanmerking komen moeten.

Met eene andere wijze van uitdrukken zouden wij de werking van het symbool  $\sqrt{-1}$  op een vektor eene splijtende kunnen noemen. Dat de vergelijking (34) een cirkel voorstelt, kan in de theorie der quaternionen ook aldus op eenvoudige wijze verkregen worden.

Uit die vergelijking volgt

$$\rho - \alpha - \sqrt{-1} \beta = 0,$$

en

$$N(\rho - \alpha - \sqrt{-1} \beta) = 0, \dots \dots \dots (36)$$

waarbij het eerste lid volgens een bekende formule getransformeerd kan worden, als volgt

$$N(\rho - \alpha - \sqrt{-1} \beta) = N(\rho - \alpha) - N\beta + 2\sqrt{-1} S(\rho - \alpha) \beta.$$

Nu besluit men uit (36)

$$N(\rho - \alpha) = N\beta \quad \text{en} \quad S(\rho - \alpha) \beta = 0. \dots (37)$$

De eerste dezer vergelijkingen stelt een bol voor om het eindpunt van den vektor  $\alpha$  als middelpunt met een straal gelijk aan  $T\beta$  beschreven; en de tweede vergelijking is die van een plat vlak door het middelpunt van den vorigen bol loodrecht op den vektor  $\beta$  aangebracht; zoodat wij op de vergelijkingen (5) en (6) gekomen zijn.

Het is niet moeielijk aan te toonen, dat de uitdrukking



$N(\rho - \alpha - \sqrt{-1} \beta)$  in de theorie der quaternionen dezelfde beteekenis bezit, als de vorm

$(\xi - x_1 - x_2 \sqrt{-1})^2 + (\eta - y_1 - y_2 \sqrt{-1})^2 + (\zeta - z_1 - z_2 \sqrt{-1})^2$ , in het eerste lid der vergelijking (4) voorkomende.

Zijn  $q$  en  $q'$  twee quaternionen, tot denzelfden noemer herleid, zoodat

$$q = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad q' = \frac{\beta}{\gamma}, \dots \dots \dots (38)$$

dan zullen wij eene uitdrukking van den vorm  $q + \sqrt{-1} q'$  of een biquaternion van HAMILTON, bepalen door de vergelijking

$$q + \sqrt{-1} q' = \frac{\alpha + \sqrt{-1} \beta}{\gamma}, \dots \dots \dots (39)$$

of in woorden: een biquaternion is het totaal der operaties, noodig om een reëlen vektor in een bivector over te voeren.

In verband met een kort te voren vermelde uitdrukkingswijze kan men ook zeggen: een biquaternion is een operator, die een vektor tot een kegel van stralen uiteensplijt.

CLIFFORD <sup>1)</sup> heeft de biquaternionen op geheel andere wijze met behulp van mechanische begrippen verklaard. De hier gegevene interpretatie schijnt mij echter toe in elk geval het voordeel van grootere eenvoudigheid te bezitten, terwijl daarbij tevens verkregen is, dat een concrete vorm met het abstracte begrip »imaginair punt» verbonden wordt.

Alvorens deze verhandeling te eindigen wensch ik nog op te merken, dat mij bij gelegenheid der in December te Amsterdam gehouden voordracht door Prof. KORTWEG werd medegedeeld, dat reeds de beide Fransche wiskundigen LAGUERRE en TARRY <sup>2)</sup> in de laatste jaren getracht hebben met het begrip »imaginair punt» een bepaalde meetkundige voorstelling te verbinden. Voor zoover ik in staat geweest ben van hunne verhandelingen inzage te verkrijgen, is mij gebleken

1°. dat de beschouwingen dier beide mathematici uitsluitend op figuren in het platte vlak betrekking hebben,

2°. dat de door hen outworpen meetkundige voorstelling

1) Mathematical papers 1882, p. 181, 385.

2) Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Paris, 1889.

uit de door mij voorgedragene ontstaat, als men den cycle, die het imaginaire punt voorstelt, vervangt òf door zijne beide snijpunten met het platte vlak der figuur (LAGUERRE) of door zijn normaal (TARRY),

3°. dat de bepaling door TARRY van eene algemeene rechte lijn gegeven niet langer geldig blijft, als men figuren in de ruimte beschouwt, terwijl daarentegen de door mij afgeleide meetkundige voorstelling der algemeene rechte met die van TARRY samenvalt, wanneer ik de onderstelling invoer, dat slechts twee coördinaten in aanmerking komen, zooals hier in het kort aangetoond is.

Bij deze onderstelling namelijk vervalt van elk der stelsels van vergelijkingen (27) (28) en (29) de derde.

Het is nu gemakkelijk in te zien, dat de beide snijpunten van een cycle met het platte vlak tot coördinaten zullen hebben

$$x = x_1 \pm y_2, \quad y = y_1 \pm x_2, \quad \dots \dots \dots (40)$$

Immers de lijnen, die deze snijpunten met het middelpunt  $P_1$  van den cycle vereenigen, staan beide loodrecht op de lijn  $OP_2$  en zijn in lengte daaraan gelijk. Met behulp der waarden (28) en (29) voor  $x_1, y_1, x_2, y_2$  gaan de beide waarden voor  $x$  en  $y$  uit (39) over in de navolgende

$$\left. \begin{aligned} x &= a' u_1 - b' u_2 + c' \text{ of } a'' u_1 + b'' u_2 + c'', \\ y &= b' u_1 + a' u_2 + d' \text{ of } b'' u_1 + a'' u_2 + d'', \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \quad (41)$$

als ter bekorting gesteld is

$$a' = a_1 - b_2, \quad b' = a_2 + b_1, \quad a'' = a_1 + b_2, \quad b'' = b_1 - a_2.$$

Hierin kunnen  $u_1$  en  $u_2$  alle mogelijke reële waarden verkrijgen. Bij elk stel waarden voor  $u_1$  en  $u_2$  behoort een paar punten  $Q$  en  $R$ , die eene eenvoudige verwantschap bezitten. Zijn namelijk  $Q'$  en  $R'$  de punten bij de waarden  $u'_1, u'_2$  behoorende, evenals  $Q$  en  $R$  met  $u_1, u_2$  overeenstemmen, dan is

$$\begin{aligned} QQ'^2 &= [a'(u_1 - u'_1) - b'(u_2 - u'_2)]^2 + [b'(u_1 - u'_1) + a'(u_2 - u'_2)]^2, \\ &= (a'^2 + b'^2) [(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2], \\ RR'^2 &= [a''(u_1 - u'_1) + b''(u_2 - u'_2)]^2 + [b''(u_1 - u'_1) - a''(u_2 - u'_2)]^2, \\ &= (a''^2 + b''^2) [(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2]; \end{aligned}$$

derhalve

$$\frac{QQ'}{RR'} = \sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{a''^2 + b''^2}} = \text{standvastig.}$$

Hieruit volgt nu onmiddellijk, dat de puntreeks door  $Q$

bij verandering van  $u_1$  en  $u_2$  beschreven, met die door R beschreven twee gelijkvormige figuren oplevert, die bij nadere beschouwing tegengesteld blijken te zijn. Nu is reeds opgemerkt, dat TARRY de beide snijpunten Q en R van een cycle met het vlak der figuur als meetkundige voorstelling van een imaginair punt gebruikt. Wij hebben dus verkregen, dat deze snijpunten bij een algemeene rechte lijn twee tegengesteld gelijkvormige figuren in het platte vlak vormen, hetgeen door TARRY als bepaling van een algemeene rechte lijn vooropgesteld wordt.

---

# DE OPLOSSING VAN LINEAIRE VECTOR- VERGELIJKINGEN IN BIJZONDERE GEVALLEN,

DOOR

**Dr. L. VAN ELFRINKHOF.**

---

De algemeene oplossing der lineaire vector-vergelijkingen is door HAMILTON gevonden en medegedeeld in zijn groote werken »Elements of quaternions" § 347—350 en »Lectures on quaternions". In de »Elements" vindt men verder in § 351 en 352 een uitgebreide studie over de lineaire vector-functie voor het geval, dat eenige standvastigen en functiën, die bij de vroeger gegeven oplossing optreden, nul worden, zonder dat de schrijver aangeeft, hoe in die gevallen vergelijkingen moeten worden opgelost. In het werk van P. G. TAIT »An elementary treatise on Quaternions" vindt men de HAMILTON'sche vorm terug, maar wordt de verklaring door het weglaten van de HAMILTON'sche functie  $\psi$  onduidelijker — terwijl de bijzondere gevallen geheel verzwegen worden, met uitzondering van één voorbeeld van zeer eenvoudige gedaante, dat juist daardoor weinig licht werpt op de in het algemeen te volgen handelwijze. Het opereeren met inverse functiën op de algemeene vergelijking, zooals TAIT doet, brengt bijzondere moeilijkheden mede en leidt niet altijd tot vereenvoudiging van het vraagstuk; zoodat men wel nieuwe betrekkingen tusschen functiën verkrijgt, doch geen oplossing der vergelijkingen, en andere betrekkingen te

hulp moeten geroepen worden. Met het oog ook op het veelvuldig optreden der lineaire vector-functie in toepassingen op het gebied der Natuur- en Werktuigkunde, zoowel als in zuiver wiskundige vraagstukken, komt mij een nauwkeurige studie der oplossings-formulen niet ongewenscht voor. Bovendien zal blijken, dat langs eenvoudigen weg in de hier bestaande leemte kan voorzien worden. De hiertoe af te leiden formules zullen van zelf ook weder de algemeene HAMILTON-sche betrekkingen opleveren. Zij worden meest alle gevonden door toepassing van de bekende grondformule

$$\delta S \alpha \beta \gamma = V \beta \gamma S \alpha \delta + V \gamma \alpha S \beta \delta + V \alpha \beta S \gamma \delta. \quad (I)$$

De op te lossen vergelijking laat zich schrijven in de korte gedaante

$$\Phi \rho = \gamma \dots \dots \dots (1)$$

waarin de functie  $\Phi$  de eigenschappen

$$\Phi(\rho + \sigma) = \Phi \rho + \Phi \sigma,$$

en

$$\Phi(x\rho) = x\Phi\rho$$

bezit, zoodra  $x$  een scalar is. Verder treedt op de verwante functie  $\Phi'$ , aan  $\Phi$  verbonden door de betrekking

$$S\rho\Phi\sigma = S\sigma\Phi'\rho,$$

en voert HAMILTON drie scalars en vier vector-functiën in, die bepaald worden door de vergelijkingen

$$\psi V\mu\nu = V\Phi'\mu\Phi'\nu, \dots \dots \dots (2)$$

$$\chi V\mu\nu = V(\mu\Phi'\nu - \nu\Phi'\mu), \dots \dots \dots (3)$$

$$\psi' V\mu\nu = V\Phi\mu\Phi\nu, \dots \dots \dots (4)$$

$$\chi' V\mu\nu = V(\mu\Phi\nu - \nu\Phi\mu), \dots \dots \dots (5)$$

$$m S\lambda\mu\nu = S\Phi'\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu \dots \dots \dots (6)$$

$$m' S\lambda\mu\nu = S(\lambda\Phi'\mu\Phi'\nu + \mu\Phi'\nu\Phi'\lambda + \nu\Phi'\lambda\Phi'\mu), \dots (7)$$

$$m'' S\lambda\mu\nu = S(\mu\nu\Phi'\lambda + \nu\lambda\Phi'\mu + \lambda\mu\Phi'\nu) \dots \dots (8)$$

HAMILTON bewijst verder, dat de scalars  $m$ ,  $m'$  en  $m''$  niet van waarde veranderen, wanneer men in de bepaling-vergelijkingen  $\Phi'$  door  $\Phi$  vervangt, en dat  $\psi'$  de verwante van  $\psi$ , en  $\chi'$  de verwante van  $\chi$  is (Elements § 347). In al deze formules zijn  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$ , drie niet in één vlak liggende vectoren.

In de eerste plaats hebben wij nu

$S\rho\phi'\lambda = S\lambda\phi\rho$ ,  $S\rho\phi'\mu = S\mu\phi\rho$ ,  $S\rho\phi'\nu = S\nu\phi\rho$ , (9)  
 of, daar  $\phi\rho = \gamma$  is,

$$S\rho\phi'\lambda = S\lambda\gamma, S\rho\phi'\mu = S\mu\gamma, S\rho\phi'\nu = S\nu\gamma. \quad (10)$$

Verder bedenkende, dat

$$\rho S\lambda\mu\nu = V\mu\nu S\lambda\rho + V\nu\lambda S\mu\rho + V\lambda\mu S\nu\rho, \quad (11)$$

verkrijgen wij na substitutie van dezen vorm in (9),

$$\left. \begin{aligned} S\mu\nu\phi'\lambda S\lambda\rho + S\nu\lambda\phi'\lambda S\mu\rho + S\lambda\mu\phi'\lambda S\nu\rho &= S\lambda\phi\rho S\lambda\mu\nu, \\ S\mu\nu\phi'\mu S\lambda\rho + S\nu\lambda\phi'\mu S\mu\rho + S\lambda\mu\phi'\mu S\nu\rho &= S\mu\phi\rho S\lambda\mu\nu, \\ S\mu\nu\phi'\nu S\lambda\rho + S\nu\lambda\phi'\nu S\mu\rho + S\lambda\mu\phi'\nu S\nu\rho &= S\nu\phi\rho S\lambda\mu\nu. \end{aligned} \right\} (12)$$

Deze zijn de drie scalar-vergelijkingen, waaraan iedere vector-vergelijking equivalent is. Men kan hierin  $\phi\rho$  dadelijk door  $\gamma$  vervangen of wel dit later doen. Nu laten zich, daar het stekkundige vergelijkingen van den eersten graad zijn, de onbekende scalars  $S\lambda\rho$ ,  $S\mu\rho$  en  $S\nu\rho$  oplossen, en substitutie hunner waarden in (11) geeft dan de verlangde waarde van  $\rho$ . Deze wijze van handelen is echter omslachtig, bovendien wordt de eindvergelijking gemakkelijker gevonden, want ook uit de vergelijking (I) volgt deze door rechtstreekse substitutie, namelijk

$$\rho S\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu = V\phi'\mu\phi'\nu S\rho\phi'\lambda + V\phi'\nu\phi'\lambda S\rho\phi'\mu + V\phi'\lambda\phi'\mu S\rho\phi'\nu, \quad \text{of wel}$$

$$\rho S\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu = V\phi'\mu\phi'\nu S\lambda\phi\rho + V\phi'\nu\phi'\lambda S\mu\phi\rho + V\phi'\lambda\phi'\mu S\nu\phi\rho. \quad (13)$$

Vervangt men hierin  $\phi\rho$  door  $\gamma$ , dan is de vergelijking  $\phi\rho = \gamma$  opgelost. Nemen wij hierbij de vergelijkingen (2) en (6) in aanmerking, dan laat zich de vergelijking schrijven in de eenvoudige gedaante

$$m\rho = \psi\phi\rho \quad \dots\dots\dots (14)$$

Dit is de eerste HAMILTON'sche oplossingsvorm. (Elements § 247 XL),

HAMILTON bewijst ook (Elements § 350 (4) en (6)) de twee volgende betrekkingen

$$m'\rho = \chi\phi\rho + \psi\rho, \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$m''\rho = \phi\rho + \chi\rho. \quad \dots\dots\dots (16)$$

Vervangt men in (16)  $\rho$  door  $\phi\rho$  en substitueert men in (15), dan komt er

$$m'\phi = m''\phi\rho - \phi^2\rho + \psi\rho. \quad \dots\dots\dots (17)$$

Door dezelfde handelwijze te herhalen en het substitueeren in (14), verkrijgen wij de HAMILTON'sche hoofdvergelijking.

$$m\rho = m'\phi\rho - m''\phi^2\rho + \phi^3\rho,$$

of

$$m\rho - m'\phi\rho + m''\phi^2\rho - \phi^3\rho = 0. \dots\dots (18)$$

Vervangen wij  $\phi\rho$  door  $\gamma$ , dan volgt de oplossing uit de vergelijking

$$m\rho = m'\gamma - m''\phi\gamma + \phi^2\gamma.$$

Daar uit  $\phi\rho = \gamma$  volgt  $\rho = \phi^{-1}\gamma$ , verkrijgt men nog de symbolische vergelijking

$$m\phi^{-1} = m' - m''\phi + \phi^2, \dots\dots\dots (19)$$

evenals men (18) ook kan schrijven in de symbolische gedaante

$$m - m'\phi + m''\phi^2 - \phi^3 = 0. \dots\dots\dots (20)$$

Opereert men op (20) met  $\phi^{-1}$ , dan ontstaat de vergelijking (19).

Wij komen nu tot het geval, dat de scalar  $m = 0$  is. Dan zijn de vectoren  $\phi'\lambda$ ,  $\phi'\mu$  en  $\phi'\nu$  coplanair. Gemakkelijk ziet men in en HAMILTON bewijst het (Elements § 351), dat alsdan  $\phi\rho$  en  $\phi'\rho$  steeds in twee bepaalde vlakken liggen, en dat de operatie  $\psi$  iederen willekeurigen vector herleidt tot de richting normaal op het vlak van  $\phi'\rho$ , en evenzoo de operatie  $\psi'$  iederen vector normaal op het vlak van  $\phi\rho$ ; en daar  $\phi\psi\rho = m\rho = 0$  en evenzoo  $\phi'\psi'\rho = m\rho = 0$ , worden dus door de operatie  $\phi$  alle vectoren  $\psi\rho$  tot nul herleid, evenzoo door  $\phi'$  alle vectoren  $\psi'\rho$ . De voorwaarde  $m = 0$  of  $S\phi'\lambda\phi'\mu\phi'\nu = 0$  is de betrekking, die aanwijst, dat ieder der vergelijkingen (12) afhankelijk is van de beide andere, zoodat slechts twee der drie vergelijkingen ter oplossing dienen kunnen. Men kan dan twee der drie onbekende scalars in de derde uitdrukken; deze laatste blijft echter onbepaald, en de substitutie in de vergelijking (11) geeft deze  $\rho$  met een onbepaalden scalar, dien men dan door  $x$  kan voorstellen. Welke der drie vergelijkingen men nu ongebruikt laat, en welken scalar men onbepaald laat, is onverschillig; de uitkomst moet dezelfde zijn, maar men kan zodoende toch negen verschillende vormen voor die uitkomst vinden. Zij zijn ook weder allen sneller door substitutie uit (I) af te leiden. Met het oog op hetgeen volgt, schrijven wij er vijf van op, namelijk

$$\left. \begin{aligned} \rho S \lambda \Phi' \mu \Phi' \nu &= V \Phi' \mu \Phi' \nu S \lambda \rho - V \lambda \Phi' \nu S \mu \Phi \rho + V \lambda \Phi' \mu S \nu \Phi \rho, & (a) \\ \rho S \mu \Phi' \nu \Phi' \lambda &= V \mu \Phi' \nu S \lambda \Phi \rho + V \Phi' \nu \Phi' \lambda S \mu \rho - V \mu \Phi' \lambda S \nu \Phi \rho, & (b) \\ \rho S \nu \Phi' \lambda \Phi' \mu &= -V \nu \Phi' \mu S \lambda \Phi \rho + V \nu \Phi' \lambda S \mu \Phi \rho + V \Phi' \lambda \Phi' \mu S \nu \rho, & (c) \\ \rho S \mu \Phi' \lambda \Phi' \mu &= -V \mu \Phi' \mu S \lambda \Phi \rho + V \mu \Phi' \lambda S \mu \Phi \rho + V \Phi' \lambda \Phi' \mu S \mu \rho, & (d) \\ \rho S \lambda \Phi' \lambda \Phi' \mu &= -V \lambda \Phi' \mu S \lambda \Phi \rho + V \lambda \Phi' \lambda S \mu \Phi \rho + V \Phi' \lambda \Phi' \mu S \lambda \rho. & (e) \end{aligned} \right\} (21)$$

Op dezelfde wijze laten zich nog negen andere formules afleiden, waarvan wij er vijf opschrijven, namelijk

$$\left. \begin{aligned} \rho S \mu \nu \Phi' \lambda &= V \mu \nu S \lambda \Phi \rho + V \nu \Phi' \lambda S \mu \rho - V \mu \Phi' \lambda S \nu \rho, & (a) \\ \rho S \nu \lambda \Phi' \mu &= -V \nu \Phi' \mu S \lambda \rho + V \nu \lambda S \mu \Phi \rho + V \lambda \Phi' \mu S \nu \rho, & (b) \\ \rho S \lambda \mu \Phi' \nu &= V \mu \Phi' \nu S \lambda \rho - V \lambda \Phi' \nu S \mu \rho + V \lambda \mu S \nu \Phi \rho, & (c) \\ \rho S \lambda \mu \Phi' \lambda &= V \lambda \mu S \lambda \Phi \rho - V \lambda \Phi' \lambda S \mu \rho + V \mu \Phi' \lambda S \lambda \rho, & (d) \\ \rho S \lambda \nu \Phi' \lambda &= V \nu \lambda S \lambda \Phi \rho - V \nu \Phi' \lambda S \lambda \rho + V \lambda \Phi' \lambda S \nu \rho. & (e) \end{aligned} \right\} (22)$$

Telt men de vergelijkingen (21) (a), (b) en (c) bij elkander op, dan verkrijgt men na eenvoudige herleiding een nieuw bewijs voor (15); evenzoo door optelling van (22) (a), (b) en (c) een nieuw bewijs voor (16).

Het doet aan de algemeenheid der oplossingen geen afbreuk, indien men thans den vector  $\nu$  laat samenvallen met de standvastige richting  $\psi' \rho$ , en daar  $\Phi' \psi' \rho = 0$  is, zal dan  $\Phi' \nu = 0$  zijn en tevens  $S \nu \Phi \rho = S \psi' \rho \Phi \rho = 0$ . Dan vallen van de negen vergelijkingen (21) alle weg, die  $\Phi' \nu$  bevatten, waardoor alleen (c), (d) en (e) bewaard blijven. Van de vergelijkingen (12) vervalt dan de derde. Zien wij tevens welke vereenvoudiging dit in de vergelijkingen (2) tot (8) geeft, dan blijkt onder anderen, dat  $m' S \lambda \mu \nu = S \nu \Phi' \lambda \Phi' \mu$  wordt. Noemen wij verder  $U \psi \rho = \psi_0$ , dan wordt nu (21) (c)

$$\rho S \nu \Phi' \lambda \Phi' \mu = V \nu \Phi' \lambda S \mu \Phi \rho - V \nu \Phi' \mu S \lambda \Phi \rho + x \psi_0, \quad (23)$$

of wel

$$\left. \begin{aligned} m' \rho &= x \Phi \rho + x \psi_0 = \\ &= m'' \Phi \rho - \Phi^2 \rho + x \Phi_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Hierin weder  $\Phi \rho = \gamma$  substitueerend is de vergelijking opgelost.

Past men op de HAMILTON'sche vergelijking (18), die als  $m = 0$  is, de gedaante aanneemt

$$m' \Phi \rho - m'' \Phi^2 \rho + \Phi^3 \rho = 0, \dots \dots \dots (25)$$

de operatie  $\Phi^{-1}$  toe, dan vindt men

$$m' \rho = m'' \Phi \rho - \Phi^2 \rho + \Phi^{-1} 0, \dots \dots \dots (26)$$

waardoor de oplossing van de vergelijking  $\Phi \rho = \gamma$  terug-



gebracht wordt, tot die van de vergelijking  $\phi \rho = 0$ . Is geen der standvastigen  $m$ ,  $m'$  of  $m''$  nul, dan voldoet daaraan, zooals uit alle bovenstaande vergelijkingen blijkt, alleen de waarde  $\rho = 0$ ; is daarentegen  $m = 0$ , dan voldoet ook de oplossing  $\rho = x \psi_0$ . In zoover nu uit onze formules blijkt, dat dus  $x \psi_0 = \phi^{-1} 0$  is, zien wij dat de HAMILTON'sche formule door operatie met  $\phi^{-1}$  een gedaante verkrijgt, die met de oplossingsformule overeenstemt; zonder de formule (24) was echter de bepaling van  $\phi^{-1} 0$  onmogelijk; met formule (24) is (26) overbodig.

In het boven bedoelde voorbeeld geeft TAIT (Quaternions 159) de formule (25) in de symbolische gedaante

$$m' \phi - m'' \phi^2 + \phi^3 = 0,$$

en opereert hierop met  $\phi^{-2}$ , zoodat hij verkrijgt

$$m' \phi^{-1} = m'' - \phi + \phi^{-2} 0,$$

waardoor een andere aanvullingsterm ontstaat, als wij gevonden hebben. In het voorbeeld van TAIT wordt voor  $\phi^{-2} 0$  de waarde van  $\phi^{-1} 0$  genomen, zoodat de oplossing toch sluit. Beschouwt men echter nauwkeurig den vorm  $\phi^{-2} 0$ , dan moet zij de oplossing zijn van de vergelijking  $\phi \rho = \phi^{-1} 0$ . Deze vergelijking heeft in het algemeen geen oplossing; want  $\phi^{-1} 0 = x \psi_0$ , en  $\psi_0$  staat loodrecht op het vlak van  $\phi' \rho$  en moet bovendien in het vlak  $\phi \rho$  liggen, wat alleen dan het geval zal zijn, als  $\psi_0$  en  $\psi'_0$  loodrecht op elkander staan. In ieder ander geval moet men in de vergelijking  $\phi \rho = \phi^{-1} 0$  deze  $\phi^{-1} 0 = 0$  nemen, om daarna bij de tweede operatie met  $\phi^{-1}$  voor  $\phi^{-1} 0$ ,  $x \psi_0$  te zetten. Men vat dus in het zelfde symbool  $\phi^{-2}$  de opeenvolgende operatieën verschillend op. De methode van TAIT is dus af te keuren.

Staat daarentegen  $\psi_0$  loodrecht op  $\psi'_0$ , dan moet de TAIT'sche aanvullingsterm bepaald worden uit de vergelijking  $\phi \rho = x \psi'_0$ , welke ingewikkelder dan de oorspronkelijke vergelijking is. Maar nu doet er zich bovendien een grooter bezwaar voor, want  $m' S \lambda \mu \nu = S \nu \phi' \lambda \phi' \mu = x S \psi'_0 V \phi' \lambda \phi' \mu = y S \psi'_0 \psi_0$ , en dus is nu  $m' = 0$  geworden, zoodat nu de vergelijkingen (24), (26) en die van TAIT allen voor oplossing ongeschikt zijn geworden.

Evenals de vergelijking (24) de bijzondere gedaante van

(15) is, ligt het voor de hand, om nu bij de vergelijking (16) hulp te zoeken. Deze geeft nu  $m''\rho = \Phi\rho + \chi\rho$  en uit (24) is geworden  $\chi\Phi\rho = -\psi\rho = -x\psi_0$ , en daar  $\Phi\chi\rho = \chi\Phi\rho$  ook  $\Phi\chi\rho = -x\psi_0$ , dus  $\chi\rho = -x\Phi^{-1}\psi_0$ , zoodat wij als oplossingsvorm zouden verkrijgen

$$m''\rho = \Phi\rho - x\Phi^{-1}\psi_0.$$

Hierin is even als vroeger evenwel de aanvullingsterm de oplossing van een meer ingewikkelde vergelijking dan de oorspronkelijke, zoodat wij wel een betrekking tusschen functien maar geen oplossingsvorm verkrijgen.

Is  $m' = m = 0$ , dan geeft de vergelijking (20)

$$m''\Phi^2 - \Phi^3 = 0,$$

en op de door TAIT aangegeven wijze met inverse functien opereerend (in dit geval met  $\Phi^{-3}$ ), verkrijgen wij de vergelijking

$$m''\Phi^{-1} = 1 + \Phi^{-3} 0,$$

en hierin is de aanvullingsterm nog ingewikkelder geworden. Wordt nu behalve  $m$  en  $m'$  ook nog  $m'' = 0$ , dan vervalt de vergelijking (16) tot de betrekking  $\Phi\rho = -\chi\rho$ , maar de HAMILTON'sche vergelijkingen (14), (15) en (16) kunnen ons nu geen oplossingsvormen meer verschaffen.

Keeren wij daarom terug tot de vergelijkingen (12) en (21). Door steeds  $\nu // \psi'_0$  te nemen, bestaan van (12) slechts de twee eerste vergelijkingen, van (21) de nummers (c) (d) en (e). Is nu  $m' = S\nu\Phi'\lambda\Phi'\mu = 0$ , dan blijkt, dat de vergelijking (c) niet geschikt is voor oplossing, wel echter de vergelijking (d); de eerste wordt ook verkregen door in (12) de scalars  $S\lambda\rho$  en  $S\mu\rho$  in  $S\nu\rho$  uit te drukken, men kan echter ook  $S\lambda\rho$  en  $S\nu\rho$  in  $S\mu\rho$  uitdrukken, wat den vorm (d) geeft. Deze blijkt voor het geval  $m' = 0$  bruikbaar te blijven. Indien ook (d) ons in den steek laat, daar ook  $\mu$  loodrecht op  $V\Phi'\lambda\Phi'\mu$  kan staan, dan hebben wij nog de vergelijking (e) en daar  $V\Phi'\lambda\Phi'\mu$  niet op de drie vectoren  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  tegelijk loodrecht kan staan, blijft deze bestaan, tenzij  $V\Phi'\lambda\Phi'\mu = 0$  wordt, hetgeen overeenkomt met de bijzonderheid, dat de operatie  $\psi$ , en ook  $\psi'$ , iederen willekeurigen vector nul maakt, een geval, dat wij afzonderlijk zullen nagaan.

Dit geval doet zich namelijk voor, wanneer  $\Phi'\lambda$ ,  $\Phi'\mu$  en

$\phi' \nu$  collineair worden, dat wil zeggen, wanneer de functie  $\phi \rho$  een zoodanige is, dat zij alle willekeurige vectoren herleidt tot een zelfde richting. Alle vergelijkingen (21) vervallen dan. Voor  $\phi' \mu$  en  $\phi' \nu$  kan men dan  $p \phi' \lambda$  en  $q \phi' \lambda$  zetten, zoodat de drie vergelijkingen (12) dan van elkander afhankelijk worden. De functien  $\psi \rho$  en  $\psi' \rho$  zijn standvastig nul, en aangezien nu  $\phi \chi \rho = \phi' \chi' \rho = 0$  is, zien wij dat  $\phi'$  iederen vector tot nul herleidt, waarop eerst de operatie  $\chi'$  is toegepast. HAMILTON bewijst, dat nu de operatie  $\chi$  iederen vector herleidt tot een vlak loodrecht op  $\phi' \rho$  en evenzoo  $\chi'$  iederen vector tot een vlak loodrecht op  $\phi \rho$ . Kiezen wij nu de vectoren  $\mu$  en  $\nu$  beide in het vlak  $\chi'$ , dan zijn dus  $\phi' \mu = \phi' \nu = 0$ . Daardoor verdwijnen weder zes van de negen vergelijkingen (22) en blijven slechts de vergelijkingen (a), (d) en (e) over. Evenzoo blijft van de vergelijkingen (12) slechts de eerste over. Bovendien is de betrekking (15) vervallen. De betrekking (16) kan nu ter oplossing dienen. Zij heeft de gedaante

$$m'' \rho = \phi \rho + \chi \rho. \dots \dots \dots (16)$$

Stelt men nu  $\phi \rho = \gamma$ , dan heeft men de oplossing, daar  $\chi \rho$  een willekeurigen vector in een vlak loodrecht op  $\phi' \rho$  voorstelt. Lost men uit de eenig overgebleven vergelijking (12)  $S \lambda \rho$  op en substitueert nu in (11), dan komt men op de vergelijking (22) (a). Bedenkt men, dat  $\phi' \mu = \phi' \nu = 0$  is, dan volgt uit de vergelijkingen (3) en (8)

$$\begin{aligned} \chi \rho S \lambda \mu \nu &= V \nu \phi' \lambda S \mu \rho - V \mu \phi' \lambda S \nu \rho, \\ m'' S \lambda \mu \nu &= S \mu \nu \phi' \lambda; \end{aligned}$$

en ziet men, dat (16) en (22) (a) dezelfde betrekking voorstellen. De HAMILTON'sche hoofdvergelijking (18) is nu geworden

$$m'' \phi^2 \rho - \phi^3 \rho = 0.$$

Die schrijver bewijst (Elements 352 (9)), dat in het onderhavige geval (namelijk  $\phi \rho = 0$ ) deze vergelijking kan teruggebracht worden tot de betrekking

$$m'' \phi \rho - \phi^2 \rho = 0, \dots \dots \dots (27)$$

wat door operatie met  $\phi^{-1}$  geeft

$$m'' \rho = \phi \rho + \phi^{-1} 0 \dots \dots \dots (28)$$

Als altijd brengt dus ook thans de HAMILTON'sche formule de oplossing van  $\phi \rho = \gamma$  terug tot de oplossing van  $\phi \rho = 0$ ,

maar brengt ons niet verder. De vergelijking (16) daarentegen geeft  $m''\rho = \chi\rho$  voor  $\phi\rho = \gamma = 0$ , zoodat, ook de vergelijking  $\phi\rho = 0$  opgelost is, en de HAMILTON'sche vorm met de onze blijkt overeen te stemmen, zoodra wij  $\rho$  vervangen door  $\phi^{-1}0$ .

De handelwijze van TAIT, namelijk opereeren met  $\phi^{-2}$  op de uit (27) volgende symbolische vergelijking  $m''\phi - \phi^2 = 0$ , zou geven  $m''\phi^{-1} - 1 = \phi^{-2}0$  of  $m''\rho = \gamma + \phi^{-2}0$ , wat weer dezelfde moeilijkheid als hierboven zou geven.

Ook in dit geval kan het gebeuren, dat  $m'' = 0$  wordt, doordat  $\mu$  en  $\nu$  met  $\phi'\lambda$  coplanair worden. Nu liggen  $\mu$  en  $\nu$  in het vlak van  $\chi'\rho$ , dus loodrecht op  $\phi\rho$ ; dus zoodra  $m'' = 0$  is, staan  $\phi\rho$  en  $\phi'\rho$  loodrecht op elkander. Evenals in het vroegere geval, dat  $m'' = 0$  was, verliest ook thans de HAMILTON'sche formule alle practische waarde.

De oplossing kan nu gevonden worden uit een der vergelijkingen (22) (d) of (e).

Daar  $\phi'\lambda$  niet gelijktijdig coplanair met de drie vectoren  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  kan zijn, kan dus steeds een dezer vergelijkingen dienen, zoo lang niet  $\phi'\lambda = 0$  is. Dan echter zijn de vectoren  $\phi'\lambda$ ,  $\phi'\mu$  en  $\phi'\nu$  alle drie nul,  $\phi'$  en evenzoo  $\phi$  herleiden alle vectoren tot nul, de vergelijking  $\phi\rho = \gamma$  eischt dan de voorwaarde  $\gamma = 0$ , en de vergelijking  $\phi\rho = 0$  geeft als uitkomst  $\rho =$  onbepaald.

Alles bijeen vattende zien wij, dat de HAMILTON'sche functionale betrekkingen (15), (16) en (18) steeds geldig zijn; dat in het geval  $\psi\rho = 0$  de vergelijking (18) overgaat in de vergelijking (27); dat door inverse operatiën daaruit vergelijkingen kunnen worden afgeleid; dat men daartoe van de operatie  $\phi^{-1}$  moet gebruik maken; dat de handelwijze van TAIT (operatie met  $\phi^{-2}$ ) de vergelijkingen van meer ingewikkelde doet afhangen; dat de operatie met  $\phi^{-1}$  in geen geval de vergelijking oplost, maar tot eenvoudiger vorm terugbrengt in de gevallen  $m = 0$ , zonder dat  $m'$  of  $m''$  nul zijn, en  $\psi\rho = 0$  zonder dat  $m'' = 0$  is; dat in de gevallen  $m = m' = m'' = 0$ ,  $\psi\rho \geq 0$  en  $\psi\rho = 0$ ,  $m'' = 0$  ook deze operatie ons geen oplossing geeft. In het door ons medegedeelde is in alle gevallen voorzien, want

Is geen der drie grootheden  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$  nul, dan volgt de oplossing uit (13) of (18) in een der gedaanten

$$\begin{aligned} \rho S \phi' \lambda \phi' \mu \phi' \nu &= V \phi' \mu \phi' \nu S \lambda \gamma + V \phi' \nu \phi' \lambda S \mu \gamma + V \phi' \lambda \phi' \mu S \nu \gamma, \\ m \rho &= m' \gamma - m'' \phi \gamma + \phi^2 \gamma. \end{aligned}$$

Is  $m = 0$  uit (21) (c), (d) of (e) of (24), door eerst  $\nu // \psi'$  of wat hetzelfde is  $\nu // V \phi' \lambda \phi' \mu$  te stellen, in de gedaanten

$$\begin{aligned} \rho S \nu \phi' \lambda \phi' \mu &= -V \nu \phi' \mu S \lambda \gamma + V \nu \phi' \lambda S \mu \gamma + x V \phi' \lambda \phi' \mu, \\ \rho S \mu \phi' \lambda \phi' \mu &= -V \mu \phi' \mu S \lambda \gamma + V \mu \phi' \lambda S \mu \gamma + x V \phi' \lambda \phi' \mu, \\ \rho S \lambda \phi' \lambda \phi' \mu &= -V \lambda \phi' \mu S \lambda \gamma + V \lambda \phi' \lambda S \mu \gamma + x V \phi' \lambda \phi' \mu, \\ m' \rho &= m'' \gamma - \phi \gamma + x \psi_0. \end{aligned}$$

Wordt tegelijkertijd  $m' = 0$ , zonder dat  $\psi \rho = 0$  is, dan blijft toch altijd een dezer vergelijkingen geschikt ter oplossing.

Is  $\psi \rho = 0$  en dus  $m = m' = 0$ , dan vindt men de oplossing uit (22) (a), (d) of (e) of uit (16), na eerst  $\mu$  en  $\nu$  loodrecht op  $\phi \rho$  aangenomen te hebben, in de gedaante

$$\begin{aligned} \rho S \mu \nu \phi' \lambda &= V \mu \nu S \lambda \gamma + x V \nu \phi' \lambda - y V \mu \phi' \lambda, \\ \rho S \nu \lambda \phi' \lambda &= V \nu \lambda S \lambda \gamma + x V \lambda \phi' \lambda - y V \nu \phi' \lambda, \\ \rho S \lambda \mu \phi' \lambda &= V \lambda \mu S \lambda \gamma + x V \mu \phi' \lambda - y V \lambda \phi' \lambda, \\ m'' \rho &= \gamma + x \rho. \end{aligned}$$

Wordt tegelijkertijd  $m'' = 0$ , dan blijft toch altijd een dezer vergelijkingen over.

Het onderzoek naar de waarden der grootheden  $m'$  en  $m''$  behoeft echter niet te geschieden, want zoodra  $m = 0$  is, kan men alle vergelijkingen, die door toepassing van (I) gevonden zijn, laten varen en daarentegen gebruik maken van de vergelijking

$$V \rho V \alpha \beta = \beta S \alpha \rho - \alpha S \beta \rho. \dots \dots (II)$$

Stellen wij hierin  $\alpha = \phi' \lambda$ ,  $\beta = \phi' \mu$ , dan verkrijgen wij

$$\begin{aligned} V \rho V \phi' \lambda \phi' \mu &= \phi' \mu S \rho \phi' \lambda - \phi' \lambda S \rho \phi' \mu, \\ V \rho V \phi' \lambda \phi' \mu &= \phi' \mu S \lambda \gamma - \phi' \lambda S \mu \gamma, \\ S \rho V \phi' \lambda \phi' \mu &= -x, \end{aligned}$$

opt.

$$\begin{aligned} \rho V \phi' \lambda \phi' \mu &= -x + \phi' \mu S \lambda \gamma - \phi' \lambda S \mu \gamma, \\ \rho (TV \phi' \lambda \phi' \mu)^2 &= x V \phi' \lambda \phi' \mu + (\phi' \mu)^2 \phi' \lambda S \lambda \gamma + (\phi' \lambda)^2 \phi' \mu S \mu \gamma. \end{aligned}$$

Deze vergelijking is onafhankelijk van de waarden van  $m'$  en  $m''$  en geldt zolang  $\psi \rho$  of, wat hetzelfde is,  $V \phi' \lambda \phi' \mu$

niet nul zijn. Is dat het geval, dan kiezen  $\nu$  en  $\mu$  loodrecht  $\phi_\rho$  en de grondvergelijkingen (10) herleiden zich tot de eene

$$S_\rho \phi' \lambda = S \lambda \gamma,$$

die op zich zelf reeds bepaalt, dat het uiteinde van  $\rho$  gelegen is in een vlak loodrecht op  $\phi' \lambda$ . Ook deze is onafhankelijk van  $m''$ .

Gaan wij ten slotte nog na, wat er gebeurt, wanneer de functie  $\phi_\rho$  zelfverwant is. Dan is  $\phi'_\rho = \phi_\rho$  en dus  $\psi'_\rho = \psi_\rho$  en  $\chi'_\rho = \chi_\rho$ . In alle behandelde formules kunnen dan de accenten bij de functieteeekens weggelaten worden. Is dan  $m = 0$ , dan staat  $\psi_\rho$  loodrecht op het vlak van  $\phi_\rho$ , en daar de vector  $\nu$  evenwijdig aan  $\psi_\rho$  wordt aangenomen, zal  $m' = S \nu \phi \lambda \phi \mu$ :  $: S \lambda \mu \nu$  niet nul kunnen worden, zonder dat  $V \phi \lambda \phi \mu$  en dus  $\psi_\rho$  nul wordt; zoodat, als  $m' = 0$  is, de vergelijkingen (21) dadelijk vervallen. Wordt nu daarenboven  $m'' = S \mu \nu \phi \lambda$ :  $: S \lambda \mu \nu = 0$ , dan moet, daar  $\mu$  en  $\nu$  gelegen zijn in het vlak  $\chi_\rho$ , dat loodrecht op  $\phi_\rho$  staat,  $\phi \lambda = 0$  zijn, dus ook  $\phi_\rho = \gamma = 0$ , en alzoo  $\rho =$  onbepaald blijven.

---

Sedert het vorenstaande ingezonden werd bij de redactie van dit tijdschrift (Maart 1891), is verschenen een boek van Dr. P. MOLENBROEK over Quaternions, waarin de schrijver, behalve de algemeene oplossing, alleen het bijzondere geval nagaat, dat  $m = 0$  is: doch men vindt bij hem slechts de bovenstaande formule (24) op andere wijze als hierboven afgeleid. Een nader onderzoek naar hetgeen er geschiedt, als ook andere coëfficiënten en functionen nul worden, heb ik ook bij dien schrijver vergeefs gezocht.

---

OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING DER  
VERHANDELINGEN OVER QUATERNION-MATRICES,

VAN DEN HEER TH. B. VAN WETTUM,

IN HET

*Nieuw Archief voor Wiskunde, deel XVII en XVIII,*

DOOR

Dr. L. VAN ELFRINKHOF.

---

De bovengenoemde verhandelingen van den Heer VAN WETTUM, zouden als interessante inleiding tot de theorie der quaternionen kunnen dienen. Wel is de daar gevolgde weg niet de eenvoudigste, toch kan het den vrienden dier theorie niet anders dan aangenaam getroffen hebben, op deze wijze weder de bevestiging van HAMILTON's uitvinding te ontmoeten. Ik zeg bevestiging, hoewel de Heer VAN WETTUM beweert een afbrekende kritiek over de quaternions geschreven te hebben; want ieder oplettend lezer zal uit het daar geschrevene niet anders dan een opbouwende kritiek opmaken. Het blijkt namelijk, dat de Heer VAN WETTUM op een onverklaarbare wijze uit zijn fraaie formules een geheel verkeerde conclusie trekt. Dit wensch ik hier aan te toonen.

In deel XVII blz. 211, § 12 vinden wij den vorm van de matrix  $Q$ . Deze geldt voor conische draaiing om de as  $OK$  over een hoek  $p$ , terwijl  $k_1$ ,  $k_2$  en  $k_3$  de hoeken zijn, die de richting der as bepalen. Noodzakelijk bestaat de be-

trekking  $\cos^2 k_1 + \cos^2 k_2 + \cos^2 k_3 = 1$ , en dus bevat de matrix slechts drie onafhankelijke elementen.

Volkomen hetzelfde is van toepassing op den anderen vorm van die matrix, welke wij als uitkomst van een ingewikkelde herleiding vinden in deel XVIII, blz. 174, § 10. Ook hier zijn de vier elementen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  verbonden door de betrekking  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , en bevat de matrix drie onderling onafhankelijke elementen.

Deze matrix kan men nu beschouwen als operator van een conische draaiing. Het quaternion  $q$  is geen operator van een conische draaiing, maar kan een operator zijn van een vlakke draaiing in een vlak loodrecht op zijn eigen as, zoodra de vector, waarop die operatie wordt toegepast, ook loodrecht op die as staat, of, wat hetzelfde is, in het vlak van  $q$  ligt. (Eens vooral moge in het nu volgende afgesproken zijn, dat  $Tq = 1$  is, daar ook de Heer VAN WETTUM slechts radiale quotienten beschouwt).

Past men de operatie  $q$  op een vector  $\alpha$  toe, dan zal in het algemeen het product  $q\alpha$  een quaternion zijn. Het zal alleen dan een vector wezen, als  $Sq\alpha = S\alpha Vq = 0$ , dus wanneer  $\alpha$  loodrecht op  $Vq$  staat. Dus alleen in dat geval werkt de operator  $q$  als operator van vlakke draaiing. Nu is iedere vlakke draaiing te beschouwen als een bijzonder geval van een conische draaiing, zoodra slechts de vector, die gedraaid wordt, loodrecht op de as staat. De voorwaarde voor dien loodrechten stand wordt nu uitgedrukt door de vergelijking  $bx + cy + dz = 0$  of  $x \cos k_1 + y \cos k_2 + z \cos k_3 = 0$ , welke de Heer VAN WETTUM ten onrechte als een tweede afhankelijkheidsbetrekking tusschen de elementen van zijn matrix aanziet. Immers de draaiing van het stelsel wordt door de vier grootheden  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$ , de elementen van de matrix, bepaald; en nu kan, als de draaiingselementen bekend zijn, de operatie op iederen willekeurigen vector van het stelsel toegepast worden, en hebben dus de elementen van den operator niets te maken met die van een der vectoren, waarop hij zal toegepast worden, al mogen ook twee standen van een vector gediend hebben om eerst de elementen van den operator te bepalen. Eenmaal bepaald, hebben  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  geen betrekking meer



met  $x$ ,  $y$  en  $z$ . Een vergelijking met  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  geeft dus nooit een betrekking van afhankelijkheid tusschen  $b$ ,  $c$  en  $d$  alleen; en nu moge  $bx + cy + dz = 0$  voorwaarde zijn, dat de conische draaiing samenvalt met een vlakke draaiing, de daardoor vereenvoudigde matrix bevat nog even goed drie onderling onafhankelijke elementen, twee voor de as en een voor den hoek van draaiing. Het bepalen van die elementen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  uit twee vectoren  $(xyz)$  en  $(x'y'z')$  schijnt de heer VAN WETTUM in deel XVIII, § 24 te behandelen, van welke paragraaf de zin mij niet duidelijk is. Men kan toch altijd trachten uit de vier gegevens van de twee vectoren  $(xyz)$  en  $(x'y'z')$  de drie elementen van den draaiingsoperator te bepalen. Er is zelfs een gegeven te veel; maar dit is juist daarom geen bezwaar, omdat voor het quotient, hetzij conisch of vlak, toch alleen maar de relatieve richting benevens de draaiingsas in aanmerking komt, zoodat hetzelfde quotient even goed uit twee andere vectoren kan gevonden worden. Ja zelfs blijkt het, als men de elementen van de matrix voor conische draaiing  $Q$  uit twee vectoren wil bepalen, dat dit vraagstuk onbepaald is en eerst bepaald wordt, zoodra men den hoek tusschen de draaiingsas en ieder der beide vectoren, welks cosinus evenredig met  $bx + cy + dz$  is, willekeurig gekozen heeft. Dit is den heer VAN WETTUM blijkbaar niet opgevallen, waarschijnlijk door dat hij begonnen is met draaiing van een coördinatenstelsel, dat, zooals bekend is, slechts op ééne wijze van een gegeven stand in een anderen gegeven stand door een enkele draaiing kan gebracht worden; terwijl een vector op oneindig veel wijzen (door conische draaiing) tot samenvalling met een tweede kan gebracht worden, en eene van deze is de vlakke draaiing. Het moge dus zijn nut hebben, de matrix af te leiden zonder draaiing van het coördinatenstelsel. De formules voor dit vraagstuk heb ik afgeleid in mijn academisch proefschrift, doch met andere notatiën dan die van den heer VAN WETTUM. Wij zullen ze hier met notatiën, meer overeenkomende met die van den heer VAN WETTUM, laten volgen. Noemen wij de projectiën van  $PP'$ , namelijk de veranderingen, die  $x$ ,  $y$  en  $z$  door de draaiing ondergaan,  $\delta x$ ,  $\delta y$  en  $\delta z$ , terwijl de

coördinaten van het midden der lijn  $PP'$   $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  genoemd zullen worden. Verder stellen wij  $\lambda = \cos k$ ,  $\mu = \cos k_2$ ,  $\nu = \cos k_3$ . Dan staat  $PP'$  loodrecht op  $OK$  en  $OM$  en dus hebben wij drie vergelijkingen

$$\begin{aligned}\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z &= 0, \\ \xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z &= 0, \\ (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 &= PP'^2.\end{aligned}$$

Hieruit verkrijgt men achtereenvolgens

$$\begin{aligned}\frac{\delta x}{\mu\zeta - \nu\eta} &= \frac{\delta y}{\nu\xi - \lambda\zeta} = \frac{\delta z}{\lambda\eta - \mu\xi} = \frac{PP'}{\sqrt{(\mu\zeta - \nu\eta)^2 + (\nu\xi - \lambda\zeta)^2 + (\lambda\eta - \mu\xi)^2}} \\ &= \frac{PP'}{\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta)^2}} = \\ &= \frac{2KM \operatorname{tg} \frac{1}{2} p}{OM \sin(KOM)} = 2 \operatorname{tg} \frac{p}{2}.\end{aligned}$$

Nu is

$$\delta x = 2 \operatorname{tg} \frac{p}{2} \left\{ \mu \left( z + \frac{1}{2} \delta z \right) - \nu \left( y + \frac{1}{2} \delta y \right) \right\},$$

$$\delta y = 2 \operatorname{tg} \frac{p}{2} \left\{ \nu \left( x + \frac{1}{2} \delta x \right) - \lambda \left( z + \frac{1}{2} \delta z \right) \right\},$$

$$\delta z = 2 \operatorname{tg} \frac{p}{2} \left\{ \lambda \left( y + \frac{1}{2} \delta y \right) - \mu \left( x + \frac{1}{2} \delta x \right) \right\}.$$

Hieruit oplossende vinden wij

$$\left. \begin{aligned}\delta x &= 2 \sin^2 \frac{p}{2} \left\{ -(\mu^2 + \nu^2)x + \left( \lambda\mu - \nu \operatorname{ctg} \frac{p}{2} \right)y + \left( \lambda\nu + \mu \operatorname{ctg} \frac{p}{2} \right)z \right\}, \\ \delta y &= 2 \sin^2 \frac{p}{2} \left\{ \left( \lambda\mu + \nu \operatorname{ctg} \frac{p}{2} \right)x - (\lambda^2 + \nu^2)y + \left( \mu\nu - \lambda \operatorname{ctg} \frac{p}{2} \right)z \right\}, \\ \delta z &= 2 \sin^2 \frac{p}{2} \left\{ \left( \lambda\nu - \mu \operatorname{ctg} \frac{p}{2} \right)x + \left( \mu\nu + \lambda \operatorname{ctg} \frac{p}{2} \right)y - (\lambda^2 + \mu^2)z \right\}.\end{aligned}\right\} (1)$$

Vervangt men hierin  $\delta x$ ,  $\delta y$  en  $\delta z$  door hun waarden  $x' - x$ ,  $y' - y$ ,  $z' - z$ , dan verkrijgt men

$$\left. \begin{aligned}x' &= \left( 1 - 2(\mu^2 + \nu^2) \sin^2 \frac{p}{2} \right)x + \left( 2\lambda\mu \sin^2 \frac{p}{2} - \nu \sin p \right)y + \left( 2\lambda\nu \sin^2 \frac{p}{2} + \mu \sin p \right)z, \\ y' &= \left( 2\lambda\mu \sin^2 \frac{p}{2} + \nu \sin p \right)x + \left( 1 - 2(\lambda^2 + \nu^2) \sin^2 \frac{p}{2} \right)y + \left( 2\mu\nu \sin^2 \frac{p}{2} - \lambda \sin p \right)z, \\ z' &= \left( 2\lambda\nu \sin^2 \frac{p}{2} - \mu \sin p \right)x + \left( 2\mu \sin^2 \frac{p}{2} + \lambda \sin p \right)y + \left( 1 - 2(\lambda^2 + \mu^2) \sin^2 \frac{p}{2} \right)z,\end{aligned}\right\} (2)$$

waaruit — zoo men bedenkt, dat  $a = \cos p$ ,  $b = \lambda \sin p$ ,  $c = \mu \sin p$ ,  $d = \nu \sin p$  zijn — de matrix van den heer VAN WETTING rechtstreeks volgt.

Moet nu omgekeerd uit  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de vorm  $Q$ , en dus de grootheden  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  en  $p$  bepaald worden, dan gaan wij uit van de vergelijkingen (1) en voeren eerst een nieuwe onbekende  $s$  in, bepaald door de vergelijking

$$\lambda x + \mu y + \nu z = s \operatorname{ctg} \frac{p}{2}, \dots \dots \dots (3)$$

waardoor de vergelijkingen (1) worden

$$\begin{aligned} \delta x &= 2 \sin^2 \frac{p}{2} \left\{ (\lambda s + \mu z - \nu y) \operatorname{ctg} \frac{p}{2} - x \right\}, \\ \delta y &= 2 \sin^2 \frac{p}{2} \left\{ (\mu s + \nu x - \lambda z) \operatorname{ctg} \frac{p}{2} - y \right\}, \\ \delta z &= 2 \sin^2 \frac{p}{2} \left\{ (\nu s + \lambda y - \mu x) \operatorname{ctg} \frac{p}{2} - z \right\}. \end{aligned}$$

Men kan uit deze vergelijkingen eerst  $y$  en  $z$  elimineeren, waardoor wij een vergelijking krijgen, die alleen  $x$  bevat, op dezelfde wijze eene, die alleen  $y$  bevat, en eindelijk een, die alleen  $z$  bevat. Dat drietal kan in de plaats van deze genomen worden. Zij vormen met de eerste der drie grondvergelijkingen en de betrekking  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$  vijf vergelijkingen ter bepaling der vijf onbekenden  $s$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  en  $p$ . Behalve die betrekking is nu het stelsel

$$\left. \begin{aligned} 2 s \lambda - \mu \delta z + \nu \delta y - 2 \xi \operatorname{tg} \frac{p}{2} &= 0, \\ \lambda \delta z + 2 s \mu - \nu \delta x - 2 \eta \operatorname{tg} \frac{p}{2} &= 0, \\ -\lambda \delta y + \mu \delta x + 2 s \nu - 2 \zeta \operatorname{tg} \frac{p}{2} &= 0, \\ \lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Zullen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  en  $p$  aan deze vier vergelijkingen voldoen, dan moet de determinant

$$\begin{vmatrix} 2s & -\delta z & \delta y & \xi \\ \delta z & 2s & -\delta x & \eta \\ -\delta y & \delta x & 2s & \zeta \\ \delta x & \delta y & \delta z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieruit zou men nu  $s$  uitrekenen en, na substitutie in (4)  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  en  $\operatorname{tg} \frac{p}{2}$ . Werkt men de determinant uit, dan verkrijgt men

$$(\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z) (P^2 + 4s^2) = 0.$$

Is nu  $\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z \geq 0$ , dan wordt  $s$  imaginair, er is dan geen draaiing mogelijk; is daarentegen  $\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z = 0$ , zooals wij in den beginne reeds vooropstelden, dan is  $s$  onbepaald. Wij kunnen voor  $s$  dus een willekeurige waarde kiezen, deze verwisselen in de vergelijkingen (4), en daarna  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  en  $p$  bepalen.

Kiezen wij nu het geval  $s = 0$  of  $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$  of  $b x + c y + d z = 0$ , dan nemen wij het bijzondere geval, dat de conische draaiing in een vlakke overgaat, maar dan worden de vergelijkingen (2)

$$\begin{aligned} x' &= x \cos p - \nu y \sin p + \mu z \sin p, \\ y' &= \nu x \sin p + y \cos p - \lambda z \sin p, \\ z' &= -\mu x \sin p + \lambda y \sin p + z \cos p; \end{aligned}$$

waaruit in verband met de betrekkingen  $a = \cos p$ ,  $b = \lambda \sin p$ , en zoo voort, de matrix kan geschreven worden in de gedaante

$$Q_0 = \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a-b & \\ -c & b & a \end{vmatrix},$$

van welke de heer VAN WETTUM de volmaakte overeenstemming met een quaternion heeft aangetoond. Het is echter duidelijk, dat de betrekking  $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$  geen voorwaarde tusschen  $\lambda$ ,  $\mu$  en  $\nu$  onderling, maar wel eene tusschen  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  ter eene en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ter andere zijde voorstelt. Er zijn dus drie onderling onafhankelijke gegevens, namelijk  $p$ , en twee van de grootheden  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Ingevolge de ingevoerde bijzonderheid zijn nu de drie eersten van de vier vergelijkingen (4) van elkaar onafhankelijk geworden. Deze hebben nu de gedaante

$$-\mu \delta z + \nu \delta y = 2 \xi \operatorname{tg} \frac{p}{2},$$

$$\lambda \delta z - \nu \delta x = 2 \eta \operatorname{tg} \frac{p}{2},$$

$$-\lambda \delta y + \mu \delta z = 2\zeta \operatorname{tg} \frac{p}{2},$$

$$\lambda \delta x + \mu \delta y + \nu \delta z = 0.$$

Door eliminatie van  $\operatorname{tg} \frac{p}{2}$  beschrijven wij achtereenvolgens

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\eta \delta z - \zeta \delta y} &= \frac{\mu}{\zeta \delta x - \xi \delta z} = \frac{\nu}{\xi \delta y - \eta \delta x} = \\ &= \frac{1}{V(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z)^2} \\ &= \frac{1}{PP' \times OM}, \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\eta \delta z - \zeta \delta y}{PP' \times OM}, \quad \mu = \frac{\zeta \delta x - \xi \delta z}{PP' \times OM}, \quad \nu = \frac{\xi \delta y - \eta \delta x}{PP' \times OM}, \\ \operatorname{tg} \frac{p}{2} &= \frac{PP'}{OM}, \end{aligned}$$

waarmede dus de elementen van den draaiingsoperator volkomen bepaald zijn.

De onjuiste opvatting van den heer VAN WETTUM laat zich vooral duidelijk zien, als wij quaternion-formulen gebruiken. De operator voor conische draaiing over een hoek  $p$ , zijnde den hoek van het quaternion  $q$ , is in deze symbolen  $q^{\frac{1}{2}}()q^{-\frac{1}{2}}$  en niet  $q()$ . Men zie de door den heer VAN WETTUM aangehaalde plaats: Elements of Quaternions, Book III, Chap. I, Art. 297). Zij namelijk  $\alpha$  de vector, die gedraaid wordt, dan zijn de uitkomsten  $q^{\frac{1}{2}}\alpha q^{-\frac{1}{2}}$  en  $q\alpha$ . Nu is  $q^{-\frac{1}{2}}$  omdat  $Tq=1$  is, hetzelfde als  $Kq^{\frac{1}{2}}$  en  $q^{\frac{1}{2}}\alpha - \alpha Kq^{\frac{1}{2}} = 2S\alpha Vq^{\frac{1}{2}}$  en dus  $q^{\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}}\alpha - \alpha Kq^{\frac{1}{2}}) = 2q^{\frac{1}{2}}S\alpha Vq^{\frac{1}{2}}$ , waaruit volgt, dat  $q^{\frac{1}{2}}\alpha q^{-\frac{1}{2}} = q\alpha 2q^{\frac{1}{2}}S\alpha Vq^{\frac{1}{2}}$ .

De beide operatoren stemmen dus overeen, zoodra  $S\alpha Vq^{\frac{1}{2}} = 0$  is, dus als  $\alpha$  en  $Vq$  loodrecht op elkander staan.

§ 25 uit de verhandeling in deel XVIII, wordt weerlegd door HAMILTON, Elements Art 201 en 202 in verband met Art 285—294, en door TAIT, An Element. treatise on Quat. § 72 en 77. HAMILTON splitst het vectorenquotient niet, zooals de heer VAN WETTUM zegt, in een  $\cos \phi$  in de richting van  $OP$  en een  $\sin \phi$  in de richting loodrecht op  $OP$  en het vlak  $QOP$ , maar hij splitst den vector  $OQ$  in een stuk

$\alpha \cos \phi$  langs  $OP$  en een stuk  $\beta \sin \phi$  in de richting loodrecht op  $OP$  in het vlak  $QOP$ , waarbij  $\alpha$  en  $\beta$  eenheidsvectoren voorstellen evenals  $OP$  en  $OQ$ , en  $\alpha = OP$  in grootte en richting is. Het quaternion wordt dus  $\left( \frac{\alpha \cos \phi + \beta \sin \phi}{\alpha} \right) = \cos \phi + \frac{\beta}{\alpha} \sin \phi$ . Het gedeelte  $\cos \phi$  heeft geen richting, terwijl  $\sin \phi$  een numerieke of scalar-coëfficiënt is, waarmede een ander vectoren-quotient, namelijk  $\frac{\beta}{\alpha}$ , vermenigvuldigd wordt. Op de aangehaalde plaatsen wordt nu omstandig aangetoond, waarom HAMILTON voor  $\frac{\beta}{\alpha}$  een nieuwen vector  $\gamma$  loodrecht op beide in afgesproken zin substitueert, waardoor het tweede gedeelte  $\gamma \sin \phi$  wordt. Hierbij is  $\sin \phi$  nog steeds een numerieke coëfficiënt, die van te voren geen richting had, en het nu nog niet heeft; alleen de vector  $\gamma$  heeft richting.

Ten gevolge van deze substitutie verkrijgt het symbool  $q\alpha$  beteekenis, ook wanneer  $\alpha$  niet in het vlak van  $q$  ligt. Het verdient echter de grootste aandacht, dat de operatie dan volstrekt niet meer een draaiing voorstelt. Dat gebeurt alleen, als  $\alpha$  loodrecht op de as van  $q$  staat. Is dat het geval, dan gaat ook de matrix  $Q$  van den heer VAN WETTUM in  $Q_0$  over, en beide zaken stemmen volkomen overeen.

De algemeene matrix, door den heer VAN WETTUM medege-deeld, en een eenheidsquaternion zijn dus verschillende operatoren, die ieder door drie onderling onafhankelijke elementen bepaald zijn. De algemeene matrix kan in quaternions door een symbool van de gedaante  $q(\ )q^{-1}$  worden voorgesteld; maar de operatie  $q\alpha$  kan, als  $\alpha$  niet in het vlak van  $q$  ligt, niet door matrices voorgesteld worden, doodeenvoudig omdat het geen draaiing is. De beide begrippen vallen samen, zoo-dra aan de voorwaarde voldaan is, die de heer VAN WETTUM gevonden heeft, namelijk  $bx + cy + dz = 0$ . Men ziet dus, dat quaternions meer vermogen dan de matrices, besproken door den heer VAN WETTUM.

Eindelijk blijkt, dat het trotsche door HAMILTON opgetrokken gebouw van dezen kant tegen iederen aanval bestand is.

# OVER EEN VRAAGSTUK, DAT IN DE GEODESIE VAN DIENST KAN ZIJN,

DOOR

**F. J. VAN DEN BERG.**

---

Indertijd maakte ons medelid Dr. CH. M. SCHOLS mij opmerkzaam, dat — als men in de geodesie wil trachten de vereffening van een driehoeksnet, wanneer daarin richtingen gemeten zijn, te vereenvoudigen door de vereffening in twee deelen te splitsen, op de wijze als door SCHLEIERMACHER gedaan is voor het geval, dat hoeken gemeten zijn — men op het volgende vraagstuk nederkomt:

»Voor ieder der driehoeken van een willekeurig driehoeksnet een getal te vinden, zóó dat telkens de som der overmaten boven de getallen der drie aangrenzende driehoeken eene gegeven waarde heeft; met dien verstande dat, telkens als een driehoek van het net slechts aan twee of aan één anderen grenst, voor iederen ontbrekkenden driehoek een driehoek met het getal nul gedacht wordt.»

Ofschoon het mij niet gelukt is voor dit doel eene geschikte rekenwijze te vinden, toepasselijk op ieder driehoeksnet van willekeurig gegeven samenstelling, en ofschoon het hieronder volgende dan ook verre van eene algemeene stelselmatige oplossing van de vorenstaande vraag verwijderd is, veroorloof ik mij toch het mede te deelen, ook al wensch ik het gevoelen van ons zoo deskundig medelid niet te weer-

spreken, dat namelijk de daarin gevolgde weg, in den regel zelfs voor de behandelde min of meer regelmatige gevallen, te ingewikkeld is voor daadwerkelijke toepassing. De opname te dezer plaatse moge dan ook gerechtvaardigd worden eensdeels door de overweging, dat het misschien uit een zuiver wiskundig oogpunt dienstig kan zijn, in eenige gevallen de berekening van wat ik ten deze hoofdonbekenden noemde, los te maken van die van het soms veel grooter aantal der overige onbekenden; anderdeels door den wensch, dat mijne behandeling, juist ten gevolge van hare onvolledigheid en beperkte praktische bruikbaarheid, een meer bevoegde tot eene afdoende oplossing van het gestelde vraagstuk moge leiden.

Naar aanleiding der te dezer zake met den Heer SCHOLS gevoerde briefwisseling merk ik overigens nog op, vooreerst dat voor het geval van een enkelen ketting van driehoeken door het geodetisch Instituut te Berlijn in 1889 is uitgegeven »Dr. P. SIMON, Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen», bevattende eene oplossing die veel overeenkomst met de mijne heeft, maar zonder goniometrische functiën; ten andere, dat men in het algemeen het gebruik van deze goniometrische functiën — die ik, niettegenstaande de daarbij optredende, maar toch spoedig weder verdwijnende, onbestaanbare grootheden, met opzet heb ingevoerd om te doen uitkomen, hoe eenvoudig mijne formules met de bekende goniometrische grondformules samenhangen — desverkiezende ook door hyperbolische functiën kan vervangen.

Na deze inleidende opmerkingen ga ik thans tot de behandeling, zooals gezegd van eenige min of meer regelmatige gevallen, over. Die behandeling steunt in hoofdzaak voor al die gevallen op ééne gemeenschappelijke betrekking tusschen de drie te vinden getallen voor drie willekeurige driehoeken van wat wij zullen noemen eene *driehoeksreeks*; daaronder verstaande een net, waarvan, doorloopen in den een of anderen zin, iedere driehoek niet anders dan aan den onmiddellijk voorgaanden en den onmiddellijk volgende sluit — hetzij overigens deze reeks aan hare beide uiteinden open is en dus een keten (Fig. 1) vormt, waarvan de eerste en



de laatste driehoek ieder, in plaats van twee, slechts één aansluitenden driehoek vertoonen, — hetzij de reeks in zich zelve terugkeert en dus zonder dergelijk paar uitzonderingsdriehoeken een kring vormt, onverschillig weder of daarvan alle driehoeken rondom een gemeenschappelijk hoekpunt liggen (volle of dichte kring, Fig. 2a), dan wel rondom zekere binnenruimte (holle of open kring, Fig. 2b), die dan voorloopig niet door driehoeken aangevuld, maar even goed als de buitenruimte onbezet of open gedacht wordt. De driehoeken van deze reeks door de volgnummers 1, 2, 3, enz. aanduidende — voor den keten, regelmatigshalve liefst bij één der beide eind- of uitzonderingsdriehoeken te beginnen; voor den kring, onverschillig bij welken driehoek — en voorts voor elken driehoek in het bijzonder het te vinden getal door  $x$  en de gegeven waarde door  $a$ , met bijvoeging telkens van zijn volgnummer als aanwijzer, voorstellende, kan men dan, om de bedoelde betrekking bij voorbeeld voor de drie driehoeken  $p - q$ ,  $p$ ,  $p + q'$  te verkrijgen, volgens de opgaaft — gelet dat iedere driehoek van de reeks óf werkelijk slechts twee aansluitende heeft, óf, voor zoover de beide einddriehoeken van een keten betreft (zie hieronder de toepassing I) althans gedacht kan worden te hebben — onder anderen beschikken over de  $q + q' - 1$  vergelijkingen —  $x_{p-q+k-1} + 3 x_{p-q+k} - x_{p-q+k+1} = a_{p-q+k} \dots$  (voor  $k = 1$  tot  $q + q' - 1$ ).

Neemt men nu om te beginnen, door  $z$  een voor een oogeblik onbepaalden coëfficiënt verstaande, de som der producten van de  $q$  eerste dezer vergelijkingen (dus  $k = 1$  tot  $q$ ) ieder met de overeenkomstige macht  $z^k$ , dan laat zich deze som aldus schrijven:

$$\begin{aligned}
 & -z.x_{p-q} + (3z - z^2) x_{p-q+1} - (1 - 3z + z^2) \sum_1^{q-2} z^k x_{p-q+k+1} + \\
 & + (-1 + 3z) z^{q-1} x_p - z^q x_{p+1} = \sum_1^q z^k a_{p-q+k}.
 \end{aligned}$$

En beschikt men dan verder over dezen coëfficiënt  $z$  zóó dat daarvoor  $1 - 3z + z^2 = 0$  wordt — aan welke voor-

waarde dus de beide wortels, stel  $z$  en  $z'$ , van deze vierkantsvergelijking voldoen — dan zijn op deze wijze gelijktijdig alle onbekenden  $x_{p-q+k+1}$  voor  $k=1$  tot  $q-2$ , dat is alle  $x_{p-q+2}$  tot  $x_{p-1}$ , geëlimineerd en vereenvoudigt zich tevens de betrekking tusschen de slechts vier overblijvende onbekenden  $x_{p-q}$ ,  $x_{p-q+1}$ ,  $x_p$  en  $x_{p+1}$  tot

$$-z x_{p-q} + x_{p-q+1} + z^{q+1} x_p - z^q x_{p+1} = \sum_1^q k z^k a_{p-q+k},$$

die nu, even goed in  $z'$  als in  $z$  kunnende neergeschreven worden, dadelijk de gelegenheid geeft om door onderlinge aftrekking nog  $x_{p-q+1}$  te elimineeren; waardoor men tusschen  $x_{p-q}$  en de twee op elkander volgende  $x_p$  en  $x_{p+1}$  overhoudt  $-(z-z')x_{p-q} +$

$$+ (z^{q+1} - z'^{q+1}) x_p - (z^q - z'^q) x_{p+1} = \sum_1^q k (z^k - z'^k) a_{p-q+k}.$$

Deze betrekking is vatbaar om onder anderen vorm, geschikt voor de zoo straks uit te voeren berekening der van de beide wortels  $z$  en  $z'$  afhangende getallencoëfficiënten, gebracht te worden; immers, indien men een door  $2 \cos 2\alpha = 3$  bepaalden hoek  $\alpha$  invoert (dat hier dadelijk de notatie  $2\alpha$  in plaats van  $\alpha$  wordt gebezigd, is om de anders later voorkomende halve hoeken te ontgaan; en dat overigens deze hoek  $\alpha$  op zich zelf eene onbestaanbare waarde heeft, zal blijken voor het verdere geenerlei bezwaar op te leveren) laat zich de bovenstaande vierkantsvergelijking in  $z$  onder den vorm  $z^2 - 2z \cos 2\alpha + 1 = 0$  en dus (door  $i$  de onbestaanbare eenheid en door  $e$  de Neperiaansche logaritmenbasis verstaande) haar wortelpaar  $(z, z') = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left( \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2$

onder den vorm  $(z, z') = \cos 2\alpha \pm i \sin 2\alpha = e^{\pm 2i\alpha}$  schrijven; waardoor in het algemeen  $z^k - z'^k = e^{2ik\alpha} - e^{-2ik\alpha} = 2i \sin 2k\alpha$  wordt en de gevonden betrekking mitsdien overgaat in  $-x_{p-q} \sin 2\alpha +$

$$+ x_p \sin 2(q+1)\alpha - x_{p+1} \sin 2q\alpha = \sum_1^q k a_{p-q+k} \sin 2k\alpha \text{ of}$$

nog beknopter, door de notatie  $A_k = \frac{\sin 2k\alpha}{\sin 2\alpha}$  in te voeren,

$$\text{in } -x_{p-q} + A_{q+1} x_p - A_q x_{p+1} = \sum_1^q A_k a_{p-q+k}.$$

Zoover gevorderd zijnde, kan men zich voorstellen, dat geheel dezelfde bewerking, zoo even op de driehoeksreeks van  $p-q$  door  $p$  heen tot  $p+1$  toegepast, thans in teruggaande orde op de reeks van  $p+q'$  door  $p+1$  heen tot  $p$  worde uitgevoerd; en is men dan, zonder de bijzonderheden dier bewerking te herhalen, gerechtigd uit de evengevonden betrekking tot de

$$\text{overeenkomstige } -x_{p+q'} + A_{q'} x_{p+1} - A_{q'-1} x_p = \sum_1^{q'-1} A_k a_{p+q'-k}$$

te besluiten; zoodat nu beiden te samen in staat stellen ten slotte ook de onbekende  $x_{p+1}$  te elimineeren en zoodoende — lettende op  $A_{q+1} A_{q'} - A_{q'-1} A_q =$

$$= [\sin 2(q+1)\alpha \cdot \sin 2q'\alpha - \sin 2(q'-1)\alpha \cdot \sin 2q\alpha] : \sin^2 2\alpha =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cdot (\cos 2q\alpha \cdot \sin 2q'\alpha + \cos 2q'\alpha \cdot \sin 2q\alpha)}{\sin^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2(q+q')\alpha}{\sin 2\alpha} = A_{q+q'} - \text{het in den aanhef bedoelde ver-}$$

band tusschen de drie willekeurige onbekenden  $x_{p-q}$ ,  $x_p$ ,  $x_{p+q'}$  te schrijven onder een der drie gelijkwaardige vormen:

$$\left. \begin{aligned} & -A_{q'} x_{p-q} + A_{q+q'} x_p - A_q x_{p+q'} = \\ & = A_{q'} \sum_1^q A_k a_{p-q+k} + A_q \sum_1^{q'-1} A_k a_{p+q'-k} = \\ & = A_{q'} \sum_1^{q-1} A_k a_{p-q+k} + A_q \sum_1^{q'} A_k a_{p+q'-k} = \\ & = A_q A_{q'} a_p + A_{q'} \sum_1^{q-1} A_k a_{p-q+k} + A_q \sum_1^{q'-1} A_k a_{p+q'-k}, \end{aligned} \right\} (1)$$

daar toch hierin de eerste term van het tweede lid voor  $k=q$  gelijk is aan den laatsten term van het derde lid voor  $k=q'$ , namelijk gelijk aan den term  $A_q A_{q'} a_p$ , die in het vierde lid, buiten de beide aldaar symmetrisch voorkomende  $\Sigma$ -termen, afzonderlijk op den voorgrond is gebracht.

In dit algemeene verband zijn trouwens voor  $q'=1$  en voor  $q=-1$  (men vatte in dit laatste geval bij voorbeeld in het tweede

lid  $\sum_1^q k$  op als de overmaat van  $\sum_1^{q+1} k = \sum_1^0 k = 0$  boven den

term zelf voor  $k=q+1=0$ , die wegens  $A_0=0$  almede gelijk nul is) weder de twee meer bijzondere betrekkingen vervat, waaruit het zoo even door eliminatie van  $x_{p+1}$  werd afgeleid.

In het bijzondere geval  $q'=q$  vereenvoudigt het zich

$$\text{wegens } \frac{A_{2q}}{A_q} = \frac{\sin 4q\alpha}{\sin 2q\alpha} = 2 \cos 2q\alpha \text{ tot } -x_{p-q} + 2x_p \cos 2q\alpha -$$

$$-x_{p+q} = A_q a_p + \sum_1^k A_k (a_{p-q+k} + a_{p+q-k}); \text{ en neemt men}$$

hierin nog meer in het bijzonder  $q=1$ , dan valt men weder in de bij den driehoek  $p$  behoorende uitgangsvergelijking  $-x_{p-1} + 3x_p - x_{p+1} = a_p$  terug.

Nog wel zoo eenvoudig is de formule (1) te vinden door achtereenvolgens de waarden van  $x_p, x_{p-1}, x_{p-2}, \dots, x_{p-q}$  in elkander te substitueeren. Op die wijze namelijk heeft men, door van den beginne af zekere getallencoëfficiënten  $A$  in te voeren, waarvan  $A_0=0, A_1=1, A_2=3A_1-A_0=3$ , en verder steeds  $A_k=3A_{k-1}-A_{k-2}$  is,

$$x_p = A_1 x_p - A_0 x_{p+1},$$

$$x_{p-1} = 3x_p - x_{p+1} - a_p = A_2 x_p - A_1 x_{p+1} - A_1 a_p,$$

$$x_{p-2} = 3x_{p-1} - x_p - a_{p-1} = A_3 x_p - A_2 x_{p+1} - A_2 a_p - A_1 a_{p-1},$$

$$x_{p-3} = 3x_{p-2} - x_{p-1} - a_{p-2} = A_4 x_p - A_3 x_{p+1} - A_3 a_p - A_2 a_{p-1} - A_1 a_{p-2},$$

en zoo voortgaande in het algemeen

$$x_{p-q} = A_{q+1} x_p - A_q x_{p+1} - \sum_1^q A_k a_{p-q+k},$$

dat is, ook wat de coëfficiënten betreft, juist weder dezelfde formule, waaruit verder als zoo even (1) zelve kan worden afgeleid, daar namelijk, op grond van den tusschen elke drie opvolgende van de thans ingevoerde coëfficiënten  $A$  aangenomen samenhang, deze niet anders zijn dan de coëfficiënten van de wederkeerige reeks

$$\begin{aligned}
\sum_0^{\infty} A_k z^k &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_k z^k + \dots = \\
&= \frac{A_0 + (A_1 - 3 A_0) z}{1 - 3 z + z^2} = \frac{z}{1 - 2 z \cos 2 \alpha + z^2} = \\
&= \frac{1}{1 - z e^{2i\alpha}} - \frac{1}{1 - z e^{-2i\alpha}} = \sum_0^{\infty} k \frac{z^k (e^{2ik\alpha} - e^{-2ik\alpha})}{e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha}} = \\
&= \sum_0^{\infty} k z^k \frac{\sin 2 k \alpha}{\sin 2 \alpha}, \text{ en dus werkelijk dezelfde als de boven}
\end{aligned}$$

evenzeer door  $A_k = \frac{\sin 2 k \alpha}{\sin 2 \alpha}$  bepaalde coëfficiënten.

Deze coëfficiënten alzoo evenredig zijnde aan de sinussen der even veelvouden van den ingevoerden hoek  $\alpha$ , gaan wij tot de uitrekening van deze sinussen over; maar nemen tegelijkertijd de berekening der sinussen van de oneven veelvouden en die der cosinussen van de even en de oneven veelvouden ter hand, daar ook de getallenwaarden van dezen ons in het volgende van dienst zullen zijn. Wij merken in de eerste plaats op, dat de ter bepaling van  $2 \alpha$  gediend hebbende formule  $\cos 2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{3}{2}$

het teeken zoowel van  $\cos \alpha$  als van  $\sin \alpha$  in het onzekere laat, en dat wij dus, ook om in overeenstemming te blijven met de reeds boven bij het neerschrijven der beide wortels

$$(z, z') = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left( \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \cos 2 \alpha \pm i \sin 2 \alpha = e^{\pm 2i\alpha}$$

stilzwijgend aangenomen rangschikking van het dubbelteeken,

bij voorbeeld  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$  en  $\sin \alpha = -\frac{i}{2}$  kunnen nemen;

waardoor wij al dadelijk (op grond van  $\cos k \alpha \pm i \sin k \alpha = (\cos \alpha \pm i \sin \alpha)^k = \left( \frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k \cos k \alpha$  leeren kennen als

den gemeenschappelijken, dat is voor even  $k$  den rationalen en voor oneven  $k$  den irrationalen, term in de ontwikkeling

der  $k^{\text{de}}$  macht van  $\frac{\pm 1 + \sqrt{5}}{2}$ ; en tegelijk  $\pm i \sin k \alpha$  als den

tegengesteld, dat is voor even  $k$  den irrationalen, en voor oneven  $k$  den rationalen, term in diezelfde ontwikkeling. Maar in plaats van deze zelfstandige bepaling van de opvolgende cosinussen en sinussen kunnen wij ook de teruglopende stellen, zooals die voortvloeit uit de beide formules

$$\cos(k+1)\alpha = 2\cos\alpha.\cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha = \sqrt{5}.\cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha$$

en

$$\sin(k+1)\alpha = 2\cos\alpha.\sin k\alpha - \sin(k-1)\alpha = \sqrt{5}.\sin k\alpha - \sin(k-1)\alpha;$$

of ook, indien men afzonderlijk de rationale en de irrationale termen ieder rechtstreeks alleen uit gelijksoortigen zou willen afleiden, uit de beide formules

$$\cos(k+2)\alpha = 2\cos 2\alpha.\cos k\alpha - \cos(k-2)\alpha = 3\cos k\alpha - \cos(k-2)\alpha$$

en

$$\sin(k+2)\alpha = 2\cos 2\alpha.\sin k\alpha - \sin(k-2)\alpha = 3\sin k\alpha - \sin(k-2)\alpha,$$

zijnde in deze laatste, door  $k$  te vervangen door  $2k-2$ , naar behooren weder de boven gebezigde teruglopende betrekking  $A_k = 3A_{k-1} - A_{k-2}$  tusschen de opvolgende coëfficiënten  $A$  zelve vervat. Hoe het zij, indien men de berekening bij voorbeeld uitstrekt tot en met den hoek  $12\alpha$  — en ook de voortzetting voor hoogere veelvouden van  $\alpha$  zou niet de minste moeite hebben — vormt men gemakkelijk de hier ingelaschte tabel

	0	$\alpha$	$2\alpha$	$3\alpha$	$4\alpha$	$5\alpha$	$6\alpha$	$7\alpha$	$8\alpha$	$9\alpha$	$10\alpha$	$11\alpha$	$12\alpha$	enz.
$2\cos =$	2	$\sqrt{5}$	3	$2\sqrt{5}$	7	$5\sqrt{5}$	18	$13\sqrt{5}$	47	$34\sqrt{5}$	128	$89\sqrt{5}$	322	enz.
$2i\sin =$	0	1	$\sqrt{5}$	4	$3\sqrt{5}$	11	$8\sqrt{5}$	29	$21\sqrt{5}$	76	$55\sqrt{5}$	199	$144\sqrt{5}$	enz.

Terwijl, zooals gezegd, in deze tabel telkens de halve som en het halve verschil der beide in eene zelfde kolom staande getallen de opvolgende machten van  $\frac{+1 + \sqrt{5}}{2}$  en van

$-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  uitmaken — zoodat in verband hiermede het vier-

kant van ieder bovengetal ( $2\cos k\alpha$ ) telkens naar behooren 4 grooter is dan dat van het daaronder staande ( $2i\sin k\alpha$ ) — zou men — daar in den regel alles slechts van verhoudingen van gelijksoortige cosinussen en van gelijksoortige sinussen (behoorende namelijk of bij even of bij oneven veelvouden

van den hoek  $\alpha$ ) zal blijken af te hangen — de tabel zelve ook kunnen vervangen door het samenstel van de vier reeksen, die men daarin als rationale termen en als coëfficiënten van de irrationale termen in de beide regels afzonderlijk aantreft, namelijk de reeksen (2, 3, 7, 18, 47, 123, 322, enz.) en (1, 2, 5, 13, 34, 89, enz.) en (1, 4, 11, 29, 76, 199, enz.) en ( $A_0 = 0$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 3$ ,  $A_3 = 8$ ,  $A_4 = 21$ ,  $A_5 = 55$ ,  $A_6 = 144$ , enz.), en die, zooals almede reeds gezegd, met elkander de eigenschap gemeen hebben, dat iedere term gelijk is aan het drievoud van den voorgaanden verminderd met den daaraan voorafgaanden. En overigens moge, om van tal van andere, almede goniometrisch te bewijzen, eigenschappen der getallen van de tabel niet te spreken, hier de opmerking nog eene plaats vinden, dat, krachtens de beide formules

$$\cos(k+1)\alpha = -2\sin\alpha.\sin k\alpha + \cos(k-1)\alpha = i\sin k\alpha + \cos(k-1)\alpha$$

en

$$i\sin(k+1)\alpha = 2i\sin\alpha.\cos k\alpha + i\sin(k-1)\alpha = \cos k\alpha + i\sin(k-1)\alpha,$$

zoowel alle rationale termen als alle coëfficiënten van irrationale, die men door beurtelingsche verspringing der beide regels opvolgend verkrijgt, twee reeksen (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, enz.) en (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, enz.) vormen, in ieder van welke elke term gelijk is aan de som der beide voorgaanden; zijnde deze laatste reeks tevens juist dezelfde, die men onder anderen aantreft, als men de bij de verdeeling eener grootheid volgens de uiterste en middelste reden voorkomende verhouding ontwikkelt in den vorm eener kettingbreuk.

Wij gaan thans over tot het maken van eenige toepassingen van de grondformule (1) op verschillende soorten van driehoeksnetten, en beginnen daarbij met

### I. Driehoeksketen.

In het algemeen kan men opmerken, dat de genoemde grondformule, afgeleid uit de vergelijkingen voor ieder der

$q + q' - 1$  driehoeken van  $p - q + 1$  door  $p$  heen tot  $p + q' - 1$ , dan ook de gegeven waarden  $a_{p-q+1}$  tot  $a_{p+q'-1}$  voor al deze driehoeken, maar overigens geene verdere gegevens, bevat; daarentegen, wat onbekenden betreft, behalve  $x_p$ , alleen de beiden,  $x_{p-q}$  en  $x_{p+q'}$ , van de wederzijds aansluitende driehoeken; welke beide onbekenden namelijk in de eerste en de laatste gebezigde vergelijking ook voorkwamen.

Nu zijn voor een keten van  $m$ , door de volgnummers 1 tot  $m$  aangeduide, driehoeken (Fig. 1) als eerste en laatste vergelijking te nemen  $-x_0 + 3x_1 - x_2 = a_1$  en  $-x_{m-1} + 3x_m - x_{m+1} = a_m$ , als men namelijk, om de gezamenlijke  $m$  vergelijkingen zelve van den keten te kunnen beschouwen als de  $q + q' - 1$  vergelijkingen van het in het algemeen gebezigde stelsel, de hulpgrootheden  $x_0 = 0$  en  $x_{m+1} = 0$  voor de wederzijds aansluitende, dat is in dit geval ontbrekende, driehoeken invoert. En derhalve is thans in de formule (1) te vervangen  $x_{p-q}$  door  $x_0 = 0$  en  $x_{p+q'}$  door  $x_{m+1} = 0$ , dus  $q$  door  $p$  en  $q'$  door  $m - p + 1$ , waardoor die formule onmiddellijk geeft voor een willekeurigen  $p^{\text{den}}$  driehoek van den keten:

$$\begin{aligned} A_{m+1} x_p &= A_{m-p+1} \sum_1^p A_k a_k + A_p \sum_1^{m-p} A_k a_{m-k+1} = \\ &= A_{m-p+1} \sum_1^{p-1} A_k a_k + A_p \sum_1^{m-p+1} A_k a_{m-k+1} = A_p A_{m-p+1} a_p + \\ &+ A_{m-p+1} \sum_1^{p-1} A_k a_k + A_p \sum_1^{m-p} A_k a_{m-k+1} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Meer in het bijzonder voor de beide uiterste driehoeken heeft men hieruit

$$A_{m+1} x_1 = \sum_1^m A_k a_{m-k+1} \text{ en } A_{m+1} x_m = \sum_1^m A_k a_k.$$

In overeenstemming met den aard van een driehoeksketen zijn deze verschillende formules geldig voor alle waarden van het aantal  $m$ , te beginnen reeds met  $m = 1$ .



Opdat het bijzondere geval voorkome, dat alle  $m$  onbekenden  $x_p$  onderling gelijk, bij voorbeeld gelijk  $a$ , zijn, moeten, zooals de vergelijkingen van den keten onmiddellijk leeren,  $a_1 = a_m = 2a$  en alle overige  $a_{k(k=2 \text{ tot } m-1)} = a$  wezen. De formule (2) geeft voor dat geval, indien men door dezen gemeenschappelijken factor  $a$  deelt en tevens in het vierde lid den eersten term voor de helft onder den tweeden en voor de wederhelft onder den derden term opneemt,  $A_{m+1} =$

$$\begin{aligned}
 &= A_{m-p+1} \left( \frac{1}{2} A_p + 2 A_1 + \sum_2^{p-1} A_k \right) + A_p \left( \frac{1}{2} A_{m-p+1} + 2 A_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_2^{m-p} A_k \right). \text{ Hierin is } \frac{1}{2} A_p + 2 A_1 + \sum_2^{p-1} A_k = 2 + \\
 &+ \frac{1}{2 \sin 2 \alpha} \left( 2 \sum_2^{p-1} \sin 2 k \alpha + \sin 2 p \alpha \right) = 2 + \frac{1}{2 \sin \alpha \cdot \sin 2 \alpha} \cdot \\
 &\cdot \left\{ \sum_2^{p-1} (\cos (2 k - 1) \alpha - \cos (2 k + 1) \alpha) + \sin \alpha \cdot \sin 2 p \alpha \right\} = \\
 &= 2 + \frac{1}{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} \{ \cos 3 \alpha - \cos (2 p - 1) \alpha + \sin \alpha \cdot \sin 2 p \alpha \} = \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{\cos 2 \alpha}{4 \sin^2 \alpha} - \frac{\cos 2 p \alpha}{4 \sin^2 \alpha}, \text{ hetgeen zich wegens } \cos 2 \alpha = \frac{3}{2} \\
 &\text{en } 4 \sin^2 \alpha = -1 \text{ herleidt tot } \cos 2 p \alpha. \text{ En vervangt men in} \\
 &\text{deze uitkomst } p \text{ door } m-p+1, \text{ dan blijkt de vorenstaande} \\
 &\text{formule voor } A_{m+1} \text{ bij vermenigvuldiging met } \sin 2 \alpha \text{ naar} \\
 &\text{behooren over te gaan in eene identiteit, namelijk in} \\
 &\sin 2 (m+1) \alpha = \sin 2 (m-p+1) \alpha \cdot \cos 2 p \alpha + \\
 &\quad + \sin 2 p \alpha \cdot \cos 2 (m-p+1) \alpha.
 \end{aligned}$$

## II. Driehoekskring.

Voor een kring van  $m$  driehoeken — hetzij een volle kring (Fig. 2a), in welk geval  $m \geq 3$  moet wezen — hetzij een holle (Fig. 2b), als wanneer er minstens drie driehoeken moeten zijn om de buitenruimte, en minstens drie andere om de binnenruimte af te sluiten, dus  $m \geq 6$  — kan men steeds, door

$q = q' = m$  te nemen en dus van uit eenigen driehoek  $p$  van den kring in beiderlei zin geheel rond te gaan, de wederzijds aansluitende driehoeken  $p - q$  en  $p + q'$  van het in het algemeen beschouwde stelsel ieder weder met  $p$  zelf doen samenvallen. Lettende, dat dan ook iedere andere willekeurige driehoek  $k$  dezelfde is als  $k - m$ , en als  $k + m$  (en dat dus zoowel  $x_{k-m} = x_{k+m} = x_k$  als  $a_{k-m} = a_{k+m} = a_k$  wordt), gaat op deze wijze de grondformule (1) dadelijk over in ééne vergelijking ter bepaling van de ééne onbekende  $x_p$ , namelijk

$$\frac{A_{2m} - 2 A_m}{A_m} x_p = \sum_1^m k A_k a_{p+k} + \sum_1^{m-1} k A_k a_{p-k}. \text{ Hierin is voor-}$$

eerst  $\frac{A_{2m} - 2 A_m}{A_m} = \frac{\sin 4 m \alpha}{\sin 2 m \alpha} - 2 = 2 (\cos 2 m \alpha - 1) = -4 \sin^2 m \alpha$ , terwijl ten andere de tweede  $\Sigma$ -term, na daarin (hetgeen  $A_0 = 0$  toelaat) de benedengrens 1 in 0 veranderd te hebben, te schrijven is (door de willekeurig gekozen notatie  $k$  te vervangen door  $m - k$ ) onder den vorm

$$\sum_1^m k A_{m-k} a_{p+k}, \text{ waardoor het geheele tweede lid den meer}$$

beknopten vorm  $\sum_1^m k (A_k + A_{m-k}) a_{p+k}$  aanneemt; en daar

$$\text{hierin weder } A_k + A_{m-k} = \frac{\sin 2 k \alpha + \sin 2 (m - k) \alpha}{\sin 2 \alpha} = \frac{2 \sin m \alpha \cdot \cos (m - 2 k) \alpha}{\sin 2 \alpha} \text{ wordt, verkrijgt men, deelende}$$

door  $\frac{2 \sin m \alpha}{\sin 2 \alpha}$ , als oplossing voor den driehoekskring de formule

$$\begin{aligned} -2 x_p \sin 2 \alpha \cdot \sin m \alpha &= x_p \{ \cos (m + 2) \alpha - \cos (m - 2) \alpha \} = \\ &= \sum_1^m k a_{p+k} \cos (m - 2 k) \alpha = \sum_0^{m-1} k a_{p+k} \cos (m - 2 k) \alpha = \\ &= \sum_1^m k a_{p-k} \cos (m - 2 k) \alpha = \sum_0^{m-1} k a_{p-k} \cos (m - 2 k) \alpha; \quad (3) \end{aligned}$$

waarin namelijk het tweede lid slechts werd ingelascht om ook den coëfficiënt van  $x_p$  uitsluitend in gelijksoortige cosinussen uit te drukken, als in alle verdere leden voorkomen; terwijl het vierde lid uit het derde, en evenzoo het zesde lid uit het vijfde, kwam, doordien daarin telkens de termen voor  $k=m$  en voor  $k=0$  onderling gelijk waren; en eindelijk het vijfde lid uit het vierde, of ook het zesde lid uit het derde, mocht worden bijgeschreven door als zoo even de notatie  $k$  weder te vervangen door  $m-k$ .

In het bijzondere geval, dat alle  $m$  driehoeken van den kring eene zelfde gegeven waarde  $a$  hebben, voldoet ook deze zelfde waarde voor ieder der  $m$  onbekenden  $x$ . Dit wordt naar behooren door de formule (3) bevestigd, die dan bij deeling door deze  $a$  overgaat in  $-2 \sin 2\alpha \cdot \sin m\alpha =$

$$\begin{aligned} &= \sum_1^m \cos(m-2k)\alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha} \sum_1^m k \{ \sin(m-2k+1)\alpha - \\ &- \sin(m-2k-1)\alpha \} = \frac{1}{2 \sin \alpha} \{ \sin(m-1)\alpha - \sin(-m-1)\alpha \} = \\ &= \frac{\sin m\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ waarin namelijk het quotient van het eerste} \end{aligned}$$

door het laatste lid, dat is  $-4 \sin^2 \alpha$ , werkelijk gelijk aan de eenheid is.

### III. *Drihoeksketen met zijdelings aansluitende driehoeken.*

Stelt men zich een keten, weder van  $m$  driehoeken  $(x, a)$ , voor — waarvan  $n$  willekeurige, door de rangnummers  $p_k$  ( $k=1$  tot  $n$ ) aangeduide, driehoeken ieder bovendien een zijdelings aansluitenden, en dus niet tot den eigenlijken keten zelf behoorenden, driehoek vertoonen, al welke zijdelingsche driehoeken ondersteld worden overigens geene verdere aansluitingen onderling of met anderen te hebben — dan duiden men bij voorbeeld voor den zijdelingschen driehoek van iederen driehoek  $p_k$  het te vinden getal door  $y_{p_k}$  en de gegeven waarde door  $b_{p_k}$  aan. Terwijl dan voor al die  $m-n$  driehoeken van den keten, die geen zijdelingschen driehoek heb-

ben, de boven gebezigde vergelijkingen volkomen onveranderd blijven, is daarentegen thans voor ieder der  $n$  driehoeken  $p$  van den keten, die wel een zijdelings aansluitenden hebben, de vergelijking te schrijven onder den vorm  $-x_{p-1} + + 3x_p - x_{p+1} = a_p + y_p$ , en geldt tegelijkertijd telkens voor dien bijbehorenden zijdelingschen driehoek zelf de vergelijking  $3y_p - x_p = b_p$ . Hieruit blijkt, dat men van het geheele sub I gebezigde stelsel van  $m$  vergelijkingen voor den enkelvoudigen keten kan overgaan tot het thans benoodigde stelsel voor den zijdelings aangevulden keten, door ieder der  $n$  voor de aangevulde driehoeken gegeven waarden  $a_p$  (maar ook geene andere) te vervangen door de overeenkomstige  $a_p + y_p$ , of wat,  $y_p$  elimineerende, hetzelfde is, door  $\frac{1}{3}x_p + (a_p + \frac{1}{3}b_p)$ . Ook voor het oplossen, even goed als voor het opstellen, van het tegenwoordige geval moet dus deze vervanging, aan te brengen in de voor het geval I gevonden oplossing, toereikend zijn; en van daar dat men — door die vervanging toe te passen in ieder der  $n$  vergelijkingen, die (de  $m - n$  overige almede in de formule (2) vervatte vergelijkingen voor een oogenblik daargelaten) de algemeene formule (2) van den driehoeksketen met name geeft voor de  $n$  driehoeken met zijdelingsche aansluiting — dadelijk  $n$  vergelijkingen verkrijgt ter bepaling van de  $n$  onbekenden  $x_{p_k (k=1 \text{ tot } n)}$ ; terwijl, deze gevonden zijnde, de substitutie van ieder dezer  $x_p$  in de overeenkomstige zoo even verkregen uitdrukking  $\frac{1}{3}x_p + (a_p + \frac{1}{3}b_p)$  de waarde aangeeft, die men voor den bijbehorenden driehoek  $p_k$  als de oorspronkelijk gegeven waarde te beschouwen heeft, om door ieder der even bedoelde  $m - n$  overige in (2) vervatte vergelijkingen rechtstreeks de onbekenden ook voor de  $m - n$  niet aangevulde driehoeken te berekenen; zijnde voor ieder der  $n$  zijdelingsche driehoeken zelve tegelijkertijd de onbekende  $y_p = \frac{1}{3}(x_p + b_p)$  gevonden.

Evenwel, de  $n$  vergelijkingen, waarvan op deze wijze de oplossing der  $n$  onbekenden  $x_{p_k}$  afhangt, bevatten ieder voor zich al die onbekenden, en de oplossing kan dus allicht vrij bewerkelijk worden. In den regel zal dan ook waarschijnlijk de oplossing van dezelfde onbekenden door middel van  $n$

vergelijkingen, die ieder slechts drie dezer onbekenden ver-  
toonen, gemakkelijker vallen; en zoodanige vergelijkingen zijn  
voor ons geval rechtstreeks op te stellen door — in plaats van  
tot de formule (2) voor den enkelvoudigen keten in zijn  
geheel — terug te treden tot de algemeene voor ieder wille-  
keurig gedeelte eener driehoeksreeks geldende grondformule  
(1). Past men deze formule namelijk toe op het geval, dat  
voor de drie driehoeken  $p - q, p, p + q'$  — wier onbekenden  
de eenige daarin voorkomende zijn, terwijl de voor de beide  
uiterste dezer driehoeken gegeven waarden  $a_{p-q}$  en  $a_{p+q'}$  er  
in ontbreken — thans drie op elkander volgende van de  $n$   
driehoeken  $p_k$  met zijdelingsche aansluiting genomen worden;  
dan is ook in deze formule weder geene andere wijziging  
noodig dan de vervanging van de thans enkele daarin voor  
een aangevulden driehoek voorkomende  $a_p$  door  $a_p + y_p$ , dat  
is door  $\frac{1}{3} x_p + (a_p + \frac{1}{3} b_p)$ . Deze vervanging bij voorkeur be-  
werkstelligende in het vierde lid, alwaar de term  $a_p$  reeds  
zelfstandig optreedt, heeft men alzoo te schrijven

$$\begin{aligned}
 -A_{q'} x_{p-q} + (A_{q+q'} - \frac{1}{3} A_q A_{q'}) x_p - A_q x_{p+q'} &= A_q A_{q'} (a_p + \frac{1}{3} b_p) + \\
 + A_{q'} \sum_{k=1}^{q-1} A_k a_{p-q+k} + A_q \sum_{k=1}^{q'-1} A_k a_{p+q'-k}; &\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

en ziedaar dus het algemeene type dat  $n$ -maal gebruikt moet  
worden, door daarin namelijk voor de drie rangnummers  
( $p - q, p, p + q'$ ) achtereenvolgens te nemen ( $0, p_1, p_2$ ) en  
( $p_1, p_2, p_3$ ) en enz. tot ( $p_{n-1}, p_n, m + 1$ ), ten einde  $n$  ver-  
gelijkingen ieder met drie opvolgende van de evenzeer slechts  
 $n$  onbekenden  $x_{p_k (k=1 \text{ tot } n)}$  te verkrijgen, daar toch de beide

uiterste,  $x_0$  en  $x_{m+1}$ , van te voren gelijk nul bekend zijn.  
Ook hier evenwel schijnt de algemeene oplossing van dit  
stelsel bezwaarlijk in den vorm eener beknopte formule ge-  
bracht te kunnen worden.

De zaak vereenvoudigt zich, wanneer alle rangnummers  $p_k$   
der zijdelings aangevulde driehoeken — met voor- en achter-  
voeging der rangnummers 0 en  $m + 1$  van de wederzijds  
ontbrekende driehoeken — opvolgend gelijke verschillen  $q = q'$   
hebben, in dier voege dat steeds  $p_k = k q$  en bovendien

$m + 1 = (n + 1)q$  is. In dat geval toch gaat de typische vergelijking (4) bij deeling door  $A_q$  over in  $-x_{p-q} +$

$$+ \left( \frac{A_{2q}}{A_q} - \frac{1}{3} A_q \right) x_p - x_{p+q} = A_q \left( a_p + \frac{1}{3} b_p \right) + \sum_{k=1}^{q-1} k A_k (a_{p-q+k} + a_{p+q-k}),$$

en geeft dus (weder lettende op  $x_0 = 0$  en  $x_{m+1} = 0$ )  $n$  vergelijkingen met  $n$  onbekenden  $x_{kq}$  ( $k=1$  tot  $n$ ), maar thans wegens de standvastigheid van  $q$  allen met dezelfde coëfficiënten; en — daar bovendien dit stelsel van  $n$  vergelijkingen zich van het sub I opgeloste stelsel van  $m$  vergelijkingen  $-x_{p-1} + 3x_p - x_{p+1} = a_p$  (voor  $p=1$  tot  $m$ ) voor den enkelvoudigen keten (aldaar was evenzeer  $x_0 = 0$  en  $x_{m+1} = 0$ ) in wezenlijkheid slechts onderscheidt, doordien de aldaar heerschende getallencoëfficiënt 3 thans door den meer samengestelden  $\frac{A_{2q}}{A_q} - \frac{1}{3} A_q$  vervangen is, en doordien ook de tweede leden thans andere bekende waarden hebben — kan de formule (2) geacht worden ook voor den nu bedoelden regelmatig aangevulden keten de oplossing te bevatten, mits men de daarin voorkomende coëfficiënten  $A_k = \frac{\sin 2k\alpha}{\sin 2\alpha}$  vervangt door dezelfde functiën van een, niet als boven door  $2 \cos 2\alpha = 3$ , maar thans door  $2 \cos 2\alpha' = \frac{A_{2q}}{A_q} - \frac{1}{3} A_q$  bepaalden hoek  $\alpha'$ , en mits men gelijktijdig de noodige wijzigingen in de oorspronkelijke gegevens  $a$  aanbrengt.

Heeft, nog meer in het bijzonder, ieder der  $m$  driehoeken van den keten een zijdelings aansluitenden (maar overigens steeds op zich zelf staanden) driehoek, en is dus  $q=1$  en  $m=(n+1)q-1=n$ , dan wordt de typische vergelijking  $-x_{p-1} + \frac{8}{3}x_p - x_{p+1} = a_p + \frac{1}{3}b_p$ ; zoodat dan, om onmiddellijk de formule (2) te kunnen toepassen, daarin slechts iedere  $A$  door de overeenkomstige bij  $2 \cos 2\alpha' = \frac{8}{3}$  behoorende en iedere  $a$  door de overeenkomstige  $a + \frac{1}{3}b$  te vervangen is.

#### IV. *Driehoekskring met zijdelings aansluitende driehoeken.*

Dit geval — onverschillig of de driehoekskring een volle of een holle is, en onverschillig welke van de aansluitende driehoeken in deze laatste onderstelling aan den buiten- en welke aan den binnenkant van den kring liggen, mits maar weder steeds alle aansluitende driehoeken overigens op zich zelve staan — verhoudt zich om zoo te zeggen tot dat van den enkelvoudigen driehoekskring gelijk het zoo even behandelde geval III tot dat van den enkelvoudigen driehoeksketen. Wij achten dan ook thans eene herhaalde uitvoerige bespreking minder noodig, en bepalen ons tot de aanwijzing dat — juist wijl een driehoekskring eene in zich zelf wederkeerende driehoeksreeks is, waarvan dus de eerste en de laatste driehoek zich in wezenlijkheid in geen enkel opzicht van de overigen onderscheiden — in het algemeen de toepassing van de sub III uit de grondformule (1) afgeleide typische vergelijking (4) op ieder der  $n$  groepen van drie rondgaande op elkander volgende driehoeken  $p_k$  ( $k=1$  tot  $n$ ) met zijdelingsche aansluiting, — dat is de vervanging in (4) van de drie rangnummers  $(p - q, p, p + q')$  door  $(p_n, p_1, p_2)$  en door  $(p_1, p_2, p_3)$  en door enz. en door  $(p_{n-2}, p_{n-1}, p_n)$  en door  $(p_{n-1}, p_n, p_1)$  — weder  $n$  vergelijkingen, ieder met slechts drie opvolgende van de  $n$  onbekenden  $x_{p_k (k=1 \text{ tot } n)}$ , zal opleveren, wier oplossing daarna ook alle overige onbekenden doet vinden.

Bij gelijkmatige verspreiding van alle aangevulde driehoeken over den geheelen kring (zoodat steeds  $p_k = k \frac{m}{n} - C$  is, zijnde  $C$  eene standvastige) is ook hier rechtstreeks van de formule (3) voor den enkelvoudigen driehoekskring, behoudens behoorlijke vervanging, gebruik te maken. Hebben bij voorbeeld alle  $m$  driehoeken van den kring een aanvullingsdriehoek, dan is in (3) de door  $2 \cos 2 \alpha = 3$  bepaalde  $\alpha$  te vervangen door de door  $2 \cos 2 \alpha' = \frac{3}{4}$  bepaalde  $\alpha'$ , en iedere  $a$  door de overeenkomstige  $a + \frac{1}{3} b$ .

### V. Volle driehoekskring met buitenkring.

Heeft men (Fig. 3) een vollen kring van  $m$  driehoeken (waarvoor weder de onbekenden door  $x$  en de gegevens door  $a$  blijven aangeduid) en is deze geheel omsloten door een buitenkring (voor wiens driehoeken de onbekenden genoemd worden  $y$  en de gegevens  $b$ ), dan sluiten aan drie willekeurige opvolgende driehoeken  $(x, a)_{p-1}$ ,  $(x, a)_p$ ,  $(x, a)_{p+1}$  van den binnenkring bij voorbeeld de drie driehoeken  $(y, b)_{p-q}$ ,  $(y, b)_p$ ,  $(y, b)_{p+q'}$  van den buitenkring aan; tusschen den eersten en den tweeden waarvan dus nog een willekeurig aantal  $q - 1$ , evenals tusschen den tweeden en den derden een willekeurig aantal  $q' - 1$  driehoeken van dezen zelfden buitenkring liggen. Denkt men zich nu voor ieder dezer  $(q - 1) + (q' - 1)$  tusschenliggende driehoeken en voor den driehoek  $(y, b)_p$  zelf, die hunne beide groepen scheidt, de vergelijking nedergeschreven, waaraan zij moeten voldoen, dan onderscheiden deze  $q + q' - 1$  vergelijkingen zich in niets anders van de even zoovele voor de in den aanhêf beschouwde driehoeksreeks, waaruit de grondformule (1) werd afgeleid, dan in de vervanging van iedere  $x$  en  $a$  van toen door de gelijknamige  $y$  en  $b$  van thans, — behoudens alleen dat voor den driehoek  $(y, b)_p$ , zijnde de eenige van de thans beschouwde buitenreeks, die door drie in plaats van door twee driehoeken omgeven is, en waarvoor de vergelijking alzoo luidt —  $y_{p-1} + 3 y_p - y_{p+1} = x_p + b_p$ , de gegeven  $a_p$  van vroeger niet door  $b_p$ , maar door  $x_p + b_p$  behoort vervangen te worden. En men is bijgevolg in de gelegenheid ook voor het nu bedoelde geval de grondformule (1) dadelijk van toepassing te maken, door daarin de omschreven vervangingen aan te brengen. Doet men dit, liever dan in haar tweede of derde, in het vierde lid, en vult men gelijktijdig in het nieuwe eerste lid de uit de driehoeken  $(x, a)_{p-1}$ ,  $(x, a)_p$ ,  $(x, a)_{p+1}$  voortvloeiende waarden  $y_{p-q} = -x_{p-2} + 3 x_{p-1} - x_p - a_{p-1}$ ,  $y_p = -x_{p-1} + 3 x_p - x_{p+1} - a_p$ ,  $y_{p+q'} = -x_p + 3 x_{p+1} - x_{p+2} - a_{p+1}$  in, dan verkrijgt men als type van de vergelijking, waaraan thans de onbekenden  $x$  van eene willekeurige groep van vijf opvolgende driehoeken  $p - 2$ ,



$p-1, p, p+1, p+2$  van den vollen binnenkring blijken te moeten voldoen:

$$\begin{aligned} & -A_{q'}(-x_{p-2} + 3x_{p-1} - x_p - a_{p-1}) + A_{q+q'}(-x_{p-1} + \\ & + 3x_p - x_{p+1} - a_p) - A_q(-x_p + 3x_{p+1} - x_{p+2} - a_{p+1}) = \\ & = A_q A_{q'}(x_p + b_p) + A_{q'} \sum_1^{q-1} k A_k b_{p-q+k} + A_q \sum_1^{q'-1} k A_k b_{p+q'-k} \dots (5) \end{aligned}$$

Door alzoo eene dergelijke vergelijking neder te schrijven voor ieder der  $m$  groepen van vijf zulke opvolgende driehoeken, die bij volledigen rondgang van den binnenkring zijn te vormen, beschikt men over  $m$  vergelijkingen, bevattende ieder vijf opvolgende der gezamenlijke  $m$  onbekenden  $x$ , en is men (op deze wijze alle buitendriehoeken geëlimineerd hebbende) in staat hieruit deze  $m$  onbekenden op te lossen. En dit gedaan zijnde, heeft men in het tweede lid der reeds beschouwde vergelijking  $-y_{p-1} + 3y_p - y_{p+1} = x_p + b_p$  van ieder der  $m$  aan een binnendriehoek aansluitende buitendriehoeken, zooals  $(y, b)_p$ , slechts telkens de voor de bijbehorende  $x_p$  gevonden waarde in te vullen, om het geheele stelsel van alle, zoowel aansluitende als niet aansluitende, buitendriehoeken te kunnen beschouwen als een op zich zelf staanden driehoekskring, die dan in zijn geheel rechtstreeks volgens de sub II ontwikkelde formule (3) is op te lossen.

Desverkiezende kan men ook, op soortgelijke wijze als zoo even de gezamenlijke  $m$  binnendriehoeken, die  $m$  buitendriehoeken oplossen, welke ieder aan een binnendriehoek grenzen. Had men namelijk in de gevonden typische vergelijking (5) de oorspronkelijke notatiën  $y_{p-q}, y_p, y_{p+q'}$  aangehouden en deze vergelijking tevens door  $A_q A_{q'}$  gedeeld, dan ware zij te schrijven geweest:  $-\frac{y_{p-q}}{A_q} + \frac{A_{q+q'} y_p}{A_q A_{q'}} -$

$$-\frac{y_{p+q'}}{A_{q'}} = x_p + b_p + \frac{1}{A_q} \sum_1^{q-1} k A_k b_{p-q+k} + \frac{1}{A_{q'}} \sum_1^{q'-1} k A_k b_{p+q'-k};$$

en denkt men zich nu evenzeer de twee overeenkomstige vergelijkingen nedergeschreven, waarvan de eerste voor de onmiddellijk voorafgaande groep van drie buitendriehoeken van de bedoelde soort, stel  $(y, b)_{p-q-q_0}, (y, b)_{p-q}, (y, b)_p$ , in

verband met de onbekende  $x_{p-1}$  (en de tweede voor de eerstvolgende groep, stel  $(y, b)_p$ ,  $(y, b)_{p+q}$ ,  $(y, b)_{p+q'+q''}$ , in verband met  $x_{p+1}$ ) dezelfde beteekenis zou hebben als deze vergelijking zelve voor de beschouwde groep  $(y, b)_{p-q}$ ,  $(y, b)_p$ ,  $(y, b)_{p+q}$  in verband met  $x_p$ ; dan is het, gelet op  $-x_{p-1} + 3x_p - x_{p+1} = y_p + a_p$ , duidelijk dat het drievoud van deze vergelijking zelve, verminderd met de som van de beide daaruit afgeschrevene, eene betrekking tusschen de vijf opvolgende onbekenden  $y_{p-q-q_0}$ ,  $y_{p-q}$ ,  $y_p$ ,  $y_{p+q'}$ ,  $y_{p+q'+q''}$  van de thans bedoelde soort zou geven; van welke betrekking ter rechtstreeksche berekening van deze  $m$  onbekenden hetzelfde gebruik zou zijn te maken als zoo even bij de betrekking (5) voor de  $m$  onbekenden  $x$  werd aangegeven. Evenwel, deze typische vergelijking in  $y$  schijnt nog wel zoo samengesteld als de overeenkomstige (5) in  $x$ .

De opmerking moge hier nog eene plaats vinden dat, als de binnenkring slechts uit  $m = 5$  driehoeken bestaat, de vijf vergelijkingen, die het type (5) levert door daarin opvolgend  $p = 1, 2, 3, 4, 5$  te nemen, ieder alle vijf onbekenden  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  bevatten; dat daarentegen voor een binnenkring van slechts  $m = 4$  driehoeken wel het type (5) zijne geldigheid behoudt, maar daarin telkens  $x_{p+2} = x_{(p+2)-m} = x_{p-2}$  wordt, zoodat dan de vier van dat type te maken toepassingen ieder, in plaats van vijf, slechts de vier voorhanden onbekenden  $x_1, x_2, x_3, x_4$  vertoonen; dat evenzeer, als de binnenkring niet meer dan het minimum van  $m = 3$  driehoeken heeft — en dus telkens zoowel  $x_{p+1} = x_{(p+1)-m} = x_{p-2}$  als  $x_{p+2} = x_{(p+2)-m} = x_{p-1}$  is — de drie toepassingen, die het type (5) alsdan oplevert, en in ieder waarvan de drie alsdan aanwezige onbekenden  $x_1, x_2, x_3$  voorkomen, voor de berekening van deze onbekenden voldoende zijn.

#### VI. *Driehoeksketen met buitenkring.*

Wij zullen ons hier bepalen tot het geval, waarin (Fig. 4) de beschouwde keten, doordien al zijne  $m$  driehoeken een gemeenschappelijk hoekpunt hebben, en dus al zijne vrije zijden aan den buitenkant liggen, niet anders dan een gedeelte van een vollen driehoekskring is. Een dergelijke keten

nu wordt ondersteld geheel door een buitenkring van driehoeken ingesloten te zijn. Laten de driehoeken van den keten, te beginnen met een zijner beide einddriehoeken, weder door  $(x, a)_1, (x, a)_2, \dots, (x, a)_{m-1}$  tot  $(x, a)_m$  worden aangeduid, en de rangnummers van de aan dezen aansluitende driehoeken van den buitenkring door  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m, p_{m+1}$ , in dier voege, dat hiervan  $p_0$  en  $p_1$  beiden sluiten aan den eersten binnendriehoek  $(x, a)_1$ , verder iedere  $p_k$  aan den gelijknamigen  $(x, a)_k$ , eindelijk  $p_m$  en  $p_{m+1}$  weder beiden aan den laatsten binnendriehoek  $(x, a)_m$ ; wat onbekenden en gegevens betreft, worden dan deze  $m+2$  aan den binnenketen aansluitende buitendriehoeken weder door  $(y, b)_{p_0}, (y, b)_{p_1}, (y, b)_{p_2}, \dots, (y, b)_{p_{m-1}}, (y, b)_{p_m}, (y, b)_{p_{m+1}}$  voorgesteld; de niet aansluitende buitendriehoeken trouwens evenzeer door  $(y, b)$ , maar met bijvoeging telkens van de tusschen de opvolgende  $p$  liggende rangnummers. Voert men nu nog voor de verschillen dezer opvolgende  $p$  de notatiën  $p_{0,1} = p_1 - p_0, p_{1,2} = p_2 - p_1, \dots, p_{m,m+1} = p_{m+1} - p_m$  en (als  $M$  het geheele aantal driehoeken van den buitenkring is)  $p_{m+1,0} = M + p_0 - p_{m+1}$  in, dan geeft de toepassing der grondformule (1) op ieder der  $m+2$  groepen van drie op elkander volgende buitendriehoeken  $p_0$  tot  $p_{m+1}$  déze  $m+2$  vergelijkingen, namelijk:

$$\begin{aligned}
 & -A_{p_{0,1}} y_{p_{m+1}} + A_{p_{m+1,0}+p_{0,1}} y_{p_0} - A_{p_{m+1,0}} y_{p_1} = \\
 & \qquad \qquad \qquad p_{m+1,0}-1 \\
 & = A_{p_{m+1,0}} A_{p_{0,1}} (x_1 + b_{p_0}) + A_{p_{0,1}} \sum_1^k A_k b_{p_{m+1}+k} + \\
 & \qquad \qquad \qquad p_{0,1}-1 \\
 & \qquad \qquad \qquad + A_{p_{m+1,0}} \sum_1^k A_k b_{p_1-k}, \\
 & -A_{p_{1,2}} y_{p_0} + A_{p_{0,1}+p_{1,2}} y_{p_1} - A_{p_{0,1}} y_{p_2} = \\
 & \qquad \qquad \qquad p_{0,1}-1 \\
 & = A_{p_{0,1}} A_{p_{1,2}} (x_1 + b_{p_1}) + A_{p_{1,2}} \sum_1^k A_k b_{p_0+k} + \\
 & \qquad \qquad \qquad p_{1,2}-1 \\
 & \qquad \qquad \qquad + A_{p_{0,1}} \sum_1^k A_k b_{p_2-k},
 \end{aligned}$$



$y_{p_{m+1}}$  en de  $m$  onbekenden  $x_1$  tot  $x_m$  bevatten (en wel in den regel ieder vijf opvolgende van deze  $x$ ); welke  $m+2$  onbekenden gevonden zijnde, dan ook de  $m$  overige onbekenden  $y_{p_1}$  tot  $y_{p_m}$  bepalen. Tevens worden, door ieder der gevonden  $x_1$  tot  $x_m$  te substitueeren in de vergelijking van den overkomstigen aansluitenden buitendriehoek — dus  $x_1$  zelf zoowel in de vergelijking van  $p_0$  als in die van  $p_1$ , en  $x_m$  zelf zoowel in  $p_m$  als in  $p_{m+1}$  — de vergelijkingen van de gezamenlijke  $M$  driehoeken van den buitenkring, zoowel aansluitende als niet aansluitende, allen gebracht in den vorm voor een sub II beschouwden zelfstandigen driehoekskring; zoodat ten slotte alle nog ontbrekende tusschen-onbekenden  $y$  volgens de aldaar opgemaakte formule (3) kunnen worden berekend.

Bestaat de beschouwde keten slechts uit  $m=1$  driehoek, namelijk  $(x, a)_1$ , dan heeft men te gebruiken de beide uitzonderingsvergelijkingen, namelijk de eerste en de laatste, en de alsdan eenige tusschenvergelijking van het zoo even nedergeschreven eerste stelsel van  $m+2$  vergelijkingen, terwijl het tweede stelsel, van  $m$  vergelijkingen, zich dan inkrimpt tot de enkele vergelijking —  $y_{p_0} - y_{p_1} - y_{p_2} + 3x_1 = a_1$  die nu, slechts ééne onbekende van de soort  $x$  bevattende, in dubbel opzicht een uitzonderingsvorm heeft: in het geheel dus vier vergelijkingen met de vier onbekenden  $x_1, y_{p_0}, y_{p_1}, y_{p_2}$ .

Heeft de bedoelde keten slechts  $m=2$  driehoeken,  $(x, a)_1$  en  $(x, a)_2$ , dan gelden de beide uiterste en bovendien twee tusschen-vergelijkingen van het eerstgenoemde stelsel, alsmede de beide uiterste vergelijkingen van het tweede stelsel; en deze zes vergelijkingen bevatten weder geene andere dan de zes onbekenden  $x_1, x_2, y_{p_0}, y_{p_1}, y_{p_2}, y_{p_3}$ .

## VII. *Kring van driehoekskringen.*

Hier wordt (Fig. 5), een samenstel van  $n$  volle driehoekskringen bedoeld, die in rondgaande volgorde twee aan twee volgens eene gemeenschappelijke zijde aaneensluiten; al welke aansluitingszijden op een aan al die kringen gemeen hoekpunt uitloopen. Voor de berekening van dit samenstel schijnt het nog wel zoo geschikt, in plaats van van de grondformule

(1) zelve, uit te gaan van de eerste der beide formules, waaruit deze door eliminatie van de onbekende  $x_{p+1}$  werd afgeleid, namelijk van de formule

$$-x_{p-q} + A_{q+1} x_p - A_q x_{p+1} = \sum_{k=1}^q A_k a_{p-q+k},$$

die trouwens, zooals toen reeds werd opgemerkt, als bijzonder geval  $q'=1$  in (1) vervat is. Laten namelijk in een willekeurigen van de  $n$  driehoekskringen, dien men bij voorbeeld als den eersten kan beschouwen, de onbekenden voor de beide driehoeken, waarmede deze kring aan den voorgaanden of  $n^{\text{den}}$  en aan den volgenden of tweeden kring aansluit, ter onderscheiding door  $X_1$  en  $X'_1$  worden aangeduid, en laten  $X_2$  en  $X'_2$ ,  $X_3$  en  $X'_3$ , enz.,  $X_n$  en  $X'_n$  voor de verdere driehoekskringen de overeenkomstige beteekenis hebben, dan komen — gesteld dat de genoemde eerste kring uit  $m+1$  driehoeken bestaat — de  $m$  vergelijkingen voor den tweeden (dat is, op  $X_1$  volgenden) tot en met den  $(m+1)^{\text{en}}$  of laatsten (dat is  $X'_1$  zelf) van deze driehoeken geheel onder denzelfden vorm voor als de  $q$  vergelijkingen (namelijk  $k=1$  tot  $q$ ), waaruit in den aanhef van dit opstel de zoo even aangehaalde formule tusschen  $x_{p-q}$ ,  $x_p$  en  $x_{p+1}$  werd afgeleid; behoudens alleen dat voor dien laatsten driehoek  $X'_1$  zelf — zijnde de eenige van de  $m$  thans beschouwde, die, behalve aan den onmiddellijk voorgaanden en volgenden driehoek ( $m^{\text{den}}$  van den eersten, en eersten van den tweeden driehoekskring), nog bovendien weder aan den allereersten driehoek  $X_1$  sluit — de vergelijking juist uit dien hoofde in haar eerste lid nog den term  $-X_1$  bevat, en dus alleen dán met de laatste ( $k=q$ ) der vroeger gebezigde vergelijkingen gelijkvormig blijft, wanneer men (dezen term naar het tweede lid overbrengende) voor dit lid, in plaats van alleen de voor den genoemden laatsten driehoek  $X'_1$  gegeven waarde  $a_p$ , thans leest  $a_p + X_1$ . Op deze wijze alzoo de overeenstemming van de vroeger gebezigde  $q$  vergelijkingen met de thans omschreven  $m$  vergelijkingen verzekerd hebbende, mag men dan ook thans dadelijk van de bovenstaande (toen als uitkomst gevonden) formule gebruik maken, waarin dus in het eerste

lid de vroegere drie onbekenden  $x_{p-q}$ ,  $x_p$  en  $x_{p+1}$  te vervangen zijn door  $X_1$ ,  $X'_1$  en  $X_2$  en het aantal  $q$  door  $m$ ; terwijl het

tweede lid  $\sum_{k=1}^q A_k a_{p-q+k}$ , wiens laatste term  $A_q a_p$  zooals

gezegd overgaat in  $A_q (a_p + X_1)$ , mitsdien eene vermeerdering met  $A_q X_1$  ondergaat en — als men bij voorbeeld door  $S_1$  verstaat de uitsluitend van de gegevens  $a$  van den thans beschouwden tweeden tot en met  $(n+1)^{\text{en}}$  driehoek van den eersten kring afhangende waarde, die dit lid anders zou hebben — door  $S_1 + A_m X_1$  behoort te worden voorgesteld. Deze verschillende waarden invullende en tegelijkertijd den alsdan laatsten term  $A_m X_1$  weder vóór het gelijktteken brengende, is hiermede de in het tegenwoordige geval tusschen de drie op elkander volgende hoofdonbekenden  $X_1$ ,  $X'_1$  en  $X_2$  geldende betrekking  $-(A_m + 1) X_1 + A_{m+1} X'_1 - A_m X_2 = S_1$  gewettigd, en beschikt men, door deze rondgaande toe te passen voor den eersten met tweeden, voor den tweeden met derden, enz., voor den laatsten met eersten driehoekskring, dus reeds over  $n$  vergelijkingen tusschen de gezamenlijke  $2n$  hoofdonbekenden  $X$  en  $X'$ ; terwijl de opmerking voor de hand ligt dat men, om de nog vereischte  $n$  andere vergelijkingen tusschen deze zelfde onbekenden te verkrijgen, slechts den zin van rondgang heeft om te keeren, waardoor bij voorbeeld, in de plaats der zoo even neergeschreven betrekking tusschen  $X_1$ ,  $X'_1$  en  $X_2$ , eene overeenkomstige in  $X'_1$ ,  $X_1$  en  $X'_2$  treedt, enz. Evenwel, uit deze  $2n$  vergelijkingen laten er zich ook  $n$  afleiden, die uitsluitend de bij  $n$  gelijkstandige driehoeken der kringen behorende  $n$  onbekenden  $X$  bevatten, en dan natuurlijk met gelijk recht ook  $n$  vergelijkingen bevattende geene andere dan de  $n$  overige onbekenden  $X'$ . Want, bestaat bij voorbeeld de tweede driehoekskring uit  $m' + 1$  driehoeken, dan schrijft men uit de gevonden betrekking onmiddellijk de overeenkomstige  $-(A_{m'} + 1) X_2 + A_{m'+1} X'_2 - A_{m'} X_3 = S_2$ , en uit deze door omkeering van den zin van rondgang de betrekking  $-(A_{m'} + 1) X'_2 + A_{m'+1} X_2 - A_{m'} X'_1 = S'_2$  af — wanneer namelijk  $S_2$  in rechtstreekschen en  $S'_2$  in omgekeerden zin op dezelfde wijze van de gegevens van den

tweeden kring afhangen als  $S_1$  van die van den eersten kring —; en denkt men zich nu, dat de waarde van  $X'_1$  uit de eerste en die van  $X'_2$  uit de tweede der drie thans voorhanden betrekkingen gesubstitueerd worden in de derde — welke substitutie zelve wij echter in het algemeen, met het oog op de eenigszins samengestelde coëfficiënten, die zij oplevert, niet werkelijk uitvoeren — dan is het duidelijk, dat eene betrekking tusschen de drie opvolgende gelijksoortige onbekenden  $X_1$ ,  $X_2$  en  $X_3$  komt, die eensdeels als type kan dienen, waaruit verder nog  $n - 1$  dergelijke betrekkingen tusschen  $X_2$ ,  $X_3$  en  $X_4$ , enz. en tusschen  $X_n$ ,  $X_1$  en  $X_2$  zijn af te schrijven, en die anderdeels weder door omkeering van den rondgaanden zin tot een overeenkomstig type tusschen drie opvolgende van de  $n$  onbekenden  $X'$  leidt. Alleen voor het gelijkmatige geval, waarin ieder der  $n$  driehoekskringsen uit hetzelfde aantal  $m + 1$  driehoeken bestaat, schrijven wij de alsdan eenvoudiger uitkomst der evenbedoelde eliminatie van  $X'_1$  en  $X'_2$  tusschen de drie voornoemde betrekkingen neder: wij vinden daarvoor, door, nu  $m' = m$  is, de som der produkten van die betrekkingen opvolgend met 1,  $\frac{A_{m+1}}{A_m}$  en  $\frac{A_{m+1}}{A_m}$  te nemen en daarbij tevens te letten op

$$\begin{aligned} A_{m+1}^2 - 1 &= \frac{\sin^2 2(m+1)\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \\ &= \frac{\sin \{2(m+1)\alpha - 2\alpha\}}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin \{2(m+1)\alpha + 2\alpha\}}{\sin 2\alpha} = \\ &= A_m A_{m+2} = A_m (3 A_{m+1} - A_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de betrekking } -(A_m + 1) X_1 + \{3(A_{m+1} - A_m) - 2\} X_2 - \\ - (A_m + 1) X_3 = S_1 + \frac{(A_m + 1) S_2 + A_{m+1} S'_2}{A_m}. \end{aligned}$$

En daar niet alleen in dit type zelf de beide uiterste der drie onbekenden  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  met gelijke coëfficiënten  $-(A_m + 1)$  zijn aangedaan, maar bovendien thans bij rondgaande toepassing van het type alle coëfficiënten onveranderd blijven, blijkt, dat voor de uitrekening van den nu bedoelden uit onderling gelijkmatige driehoekskringsen bestaanden kring partij kan worden getrokken van eene soortgelijke opmerking als aan het slot zoowel van III als van IV werd gemaakt; en dat met name



die uitrekening kan geacht worden — bij behoorlijke vervanging en van den oorspronkelijken hoek  $\alpha$  en van de oorspronkelijke gegevens  $a$  — reeds in de sub II voor den enkelvoudigen driehoekskring medegedeelde formule (3) vervat te zijn. Althans voor zoover betreft de boven als hoofdonbekenden aangeduide onbekenden  $X$ , en dan natuurlijk evenzeer voor de hoofdonbekenden  $X'$ , dat is dus te samen voor al die driehoeken, die aan een naastliggenden kring sluiten. Trouwens, na hetgeen vroeger in soortgelijke gevallen daaromtrent is gezegd, achten wij het thans minder noodig — hetzij in het bijzondere geval van  $n$  gelijkmatige of in het algemeene geval van  $n$  ongelijkmatige kringen — nog afzonderlijk stil te staan bij de berekening voor de overige, geene dergelijke aansluiting vertoonende, driehoeken.

De hier besproken handelwijze geldt voor alle waarden van  $n$ , te beginnen reeds met  $n=2$ , dat is dus voor twee driehoekskringen, wel te verstaan als deze volgens twee gemeenschappelijke op elkander volgende zijden aaneensluiten, en dus ook hier weder één gemeenschappelijk hoekpunt in het inwendige der volledige figuur vertoonen. In dat geval bedraagt het aantal der, ieder door drie driehoeken omringde, driehoeken slechts vier, met de vier hoofdonbekenden  $X_1$ ,  $X'_1$ ,  $X_2$  en  $X'_2$ .

Had men daarentegen te doen met twee driehoekskringen, die slechts volgens ééne gemeenschappelijke zijde aan elkander sluiten, en wier beide gemeenschappelijke hoekpunten dus niet in het inwendige maar aan den omtrek der figuur liggen, dan zouden deze twee kringen te samen, in plaats van weder een kring, nu het meest eenvoudige geval van een keten van driehoekskringen vormen. In de vergelijking voor ieder der beide driehoeken wederzijds de gemeenschappelijke zijde kan men dan de onbekende van den anderen driehoek weder in het tweede lid schrijven; zoodoende, door de formule (3) op ieder dezer driehoeken, beschouwd in zijn eigen kring, toe te passen, de onbekende van dezen driehoek in die van den anderen uitdrukken; en alzoo dadelijk een stelsel van twee vergelijkingen met deze twee hoofdonbekenden opstellen. Ook het geval van een keten van meer dan twee kringen, wanneer

in ieder dezer kringen de beide driehoeken, waarvan de eene aan den voorgaanden en de andere aan den volgende kring grenst, niet onderling aaneensluiten, zou in dezen zelfden geest te behandelen zijn.

### VIII. *Twee driehoeksketens naast elkander.*

De beide hier bedoelde ketens worden ondersteld zóó met elkander samen te hangen (Fig. 6), dat eenige willekeurige driehoeken van den eersten keten ieder aansluiten aan een willekeurigen driehoek van den tweeden; zijnde daarbij het geval niet uitgesloten, dat ook — hetzij aan het begin of aan het einde van de twee ketens — hetzij aan het begin en het einde tegelijk — beider uiterste driehoeken een paar aaneensluitende zouden vormen. Voor zoover overigens de aansluitingszijden niet allen doorlopend op elkander volgen, maar misschien hier of daar door zekere ruimten afgebroken zijn, alwaar de beide ketens op eenigen afstand van elkander blijven, worden dergelijke open ruimten, evenals in het inwendige van een hollen kring (Fig. 2b) het geval was, als niet door driehoeken bezet gedacht. De berekening van het thans bedoelde samenstel, althans het opstellen van zekere daartoe in aanmerking komende hoofdvergelijkingen, kan veel overeenkomst hebben met wat boven sub III ter zake van een zijdelings aangevulden keten werd uiteengezet. Laat namelijk thans de eerste keten, als dáár, bestaan uit  $m$  driehoeken  $(x, a)$ , waarvan er  $n$ , aangewezen door de rangnummers  $p_k$  ( $k=1$  tot  $n$ ), de aan den tweeden keten aansluitende zijn; laat evenzeer de tweede keten uit  $m'$  driehoeken  $(x', a')$  bestaan, waarvan dan een gelijk aantal  $n$ , aangewezen door de rangnummers  $p'_k$  ( $k=1$  tot  $n$ ), aan den eersten keten sluiten; de beide rijen  $p_k$  en  $p'_k$  in de figuur in denzelfden zin tellende, zal dan eene verdere onderscheiding van twee soorten of groepen van aanwijzers, bij voorbeeld  $k$  en  $k'$ , overbodig blijken, doordien elk paar driehoeken  $(x, a)_{p_k}$  en  $(x', a')_{p'_k}$  met gemeenschappelijken aanwijzer  $k$  juist een aaneensluitend paar is. Ook nu vindt, evenals toen bij III, de grondformule (1)

weder eene doelmatige toepassing door voor de drie driehoeken  $p - q$ ,  $p$ ,  $p + q'$ , waarop zij in het algemeen betrekking heeft, te nemen drie op elkander volgende van de  $n$  driehoeken  $p_k$ , behoorende tot den eersten en aansluitende aan den tweeden keten: immers, wijl in deze formule de gegeven waarden  $a_{p-q}$  en  $a_{p+q'}$  van de beide uiterste genoemde driehoeken niet optreden, en men alzoo niet behoeft te letten op de wijzigingen, die deze waarden anders bij de beoogde toepassing (wegens de aansluiting van de thans bedoelde uiterste driehoeken aan den tweeden keten) zouden ondergaan — en wijl overigens alle tusschendriehoeken tot de niet aansluitende behooren, terwijl de in het eerste lid der voor den middelsten driehoek  $p$  geldende vergelijking thans wegens diens aansluiting bijkomende term  $-x'_{p'}$  in het tweede lid kan worden overgebracht — is in die formule (1) geene andere wijziging noodig dan de vervanging van de gegeven  $a_p$  door  $a_p + x'_{p'}$ . Het gemakkelijkst geschiedt die vervanging weder in het vierde, in plaats van in het tweede of het derde lid, van (1); en dit geeft de betrekking  $-A_{q'}x_{p-q} + A_{q+q'}x_p -$

$$-A_q x_{p+q'} - A_q A_{q'} x'_{p'} = A_q A_{q'} a_p + A_{q'} \sum_1^{q-1} A_k a_{p-q+k} + \\ + A_q \sum_1^{q'-1} A_k a_{p+q'-k} \text{ tusschen de onbekenden voor elke drie}$$

op elkander volgende aansluitingsdriehoeken van den eersten keten en voor dien driehoek van den tweeden keten, die aan den middelsten van deze drie aansluit. Deze boven bedoelde hoofdvergelijking kan nu  $n$ -maal worden toegepast en wel — indien men weder (zooals ook sub I en sub III geschiedde) regelmatigshalve en voor een oogenblik de beide van te voren bekende hulpgrootheden  $x_0 = 0$  en  $x_{m+1} = 0$  voor de beide ontbrekende driehoeken invoert, die men zich wederzijds den eersten keten toegevoegd kan denken — door voor de vier rangnummers  $(p-q, p, p+q', p')$  achtereenvolgens te nemen  $(0, p_1, p_2, p'_1)$  en  $(p_1, p_2, p_3, p'_2)$  en enz. tot  $(p_{n-1}, p_n, m+1, p'_n)$ . Zoodoende verkrijgt men  $n$  vergelijkingen, bevattende, juist omdat  $x_0$  en  $x_{m+1}$  reeds bekend zijn, de

$2n$  hoofdonbekenden  $x_{p_k (k=1 \text{ tot } n)}$  en  $x'_{p'_k (k=1 \text{ tot } n)}$  van het vraagstuk; terwijl het wel geene verdere toelichting zal behoeven, dat men, door de rollen der beide driehoeksketens te verwisselen, daaruit terstond nog  $n$  overeenkomstige vergelijkingen tusschen dezelfde onbekenden afschrijft; zoodat de gezamenlijke beschikbare  $2n$  vergelijkingen toelaten deze  $2n$  hoofdonbekenden, en daaruit weder in voege als vroeger alle overige onbekenden, te berekenen.

Opmerking verdient nog, dat men, uit de zoo even verkregen typische vergelijking tusschen drie op elkander volgende aansluitingsdriehoeken van één der ketens en den bij den middelsten behoorenden aansluitingsdriehoek van den anderen keten, ook eene typische vergelijking kan afleiden, die in het algemeen vijf op elkander volgende aansluitingsdriehoeken, maar nu uitsluitend van één der beide ketens, omvat. Men heeft bij voorbeeld eene bekende vergelijking tusschen  $(x_{p_{k-1}}, x_{p_k}, x_{p_{k+1}}, x'_{p'_k})$ ; maar dan evenzeer eene tusschen  $(x_{p_{k-2}}, x_{p_{k-1}}, x_{p_k}, x'_{p'_{k-1}})$  en eene tusschen  $(x_{p_k}, x_{p_{k+1}}, x_{p_{k+2}}, x'_{p'_{k+1}})$ ; wederkeerig ook nog eene tusschen  $(x'_{p'_{k-1}}, x'_{p'_k}, x'_{p'_{k+1}}, x_{p_k})$ ; het is dan duidelijk dat de eliminatie van de drie onbekenden  $x'_{p'_{k-1}}, x'_{p'_k}, x'_{p'_{k+1}}$  tusschen deze vier vergelijkingen eene vergelijking tusschen de vijf opvolgende onbekenden  $x_{p_{k-2}}, x_{p_{k-1}}, x_{p_k}, x_{p_{k+1}}, x_{p_{k+2}}$  zal leveren.

---

Terwijl wij het in het algemeen bij deze toepassingen I—VIII van de grondformule (1) op verschillende vormen van driehoeksnetten zullen laten, willen wij toch door een bepaald voorbeeld doen uitkomen, dat, wanneer diezelfde vormen nog meer bijzonderheden vertoonen dan wij in het voorgaande onderstelden, de oplossing van ons vraagstuk waarschijnlijk dikwijls op geschikte wijze nog verder kan worden doorgevoerd. Wij kiezen als zoodanig voorbeeld het onder V be-

handelde geval van een vollen driehoekskring met buitenkring, maar thans in de onderstelling, dat de aantallen  $q-1$ ,  $q'-1$ , enz. der driehoeken, die telkens tusschen twee opvolgende der aan den binnenkring aansluitende buitendriehoeken liggen — en welke aantallen vroeger ongelijk gedacht werden — nu allen onderling gelijk zijn. Voor de meer regelmatige figuur, op deze wijze door de standvastigheid van alle  $q=q'=$  enz. gekenmerkt, blijkt dan bij deeling van de boven voor het meer algemeene geval verkregen betrekking (5) door  $A_q = A_{q'}$  — wanneer men daarbij let op de verhouding  $\frac{A_{q+q'}}{A_q} = \frac{A_{2q}}{A_q} = \frac{\sin 4 q \alpha}{\sin 2 q \alpha} = 2 \cos 2 q \alpha$  en tevens de gelijksoortige termen bijeenbrengt, en ter bekorting tijdelijk de notatie  $B_p = -a_{p-1} + 2 a_p \cos 2 q \alpha - a_{p+1} + A_q b_p +$   
 $q-1$   
 $+ \sum_1^k A_k (b_{p-q+k} + b_{p+q-k})$  invoert — als symmetrische ty-

pische vergelijking te gelden:

$$(x_{p-2} + x_{p+2}) - (3 + 2 \cos 2 q \alpha) (x_{p-1} + x_{p+1}) + \\ + 2 \left( 1 + 3 \cos 2 q \alpha - \frac{A_q}{2} \right) x_p = B_p. \dots (5')$$

En de vraag is alzoo de  $m$  onbekenden  $x_1$  tot en met  $x_m$  op te lossen uit de  $m$  vergelijkingen met standvastige coëfficiënten, die dit type bij volledigen rondgang van  $p=1$  tot en met  $m$  oplevert telkens tusschen vijf opvolgende van deze onbekenden: eene vraag, die in het tegenwoordige regelmatige geval naar het schijnt weder geschikt onder beknopten goniometrischen vorm kan beantwoord worden. Want daar ieder dezer  $m$  onbekenden blijkbaar eene gelijkslachtige lineaire functie van de  $m$  gegevens  $B_p$  zal wezen, kan men (om de oplossing gemakkelijker te overzien) aanvankelijk onderstellen, dat al deze gegevens op één na, bij voorbeeld de allereerste,  $B_1$ , in nul zouden overgaan, en kan men de, in deze onderstelling, voor eene willekeurige onbekende  $x_p$  komende waarde daarna door de overeenkomstige, uit de overige gegevens  $B_p$  voortvloeiende, waarden aanvullen tot eene algebraïsche som. Nu vertoont het aldus vereenvoudigde stelsel der  $m$  vergelijkingen (5') de bijzonderheid dat, indien men

daarin  $x_1$  onveranderd laat, maar  $x_2$  en  $x_m$ ,  $x_3$  en  $x_{m-1}$ , enz., in het algemeen  $x_p$  en  $x_{m-p+2}$ , onderling verwisselt (zoodat voor even  $m$  ook  $x_{\frac{m}{2}+1}$  onveranderd blijft), alsdan de 1<sup>e</sup> vergelijking zelve geene verandering ondergaat, maar de 2<sup>e</sup> en de  $m^{\text{de}}$ , de 3<sup>e</sup> en de  $(m-1)^{\text{e}}$ , enz., in het algemeen de  $p^{\text{de}}$  en de  $(m-p+2)^{\text{e}}$  vergelijking onderling verwisselen (zoodat voor even  $m$  weder de  $\left(\frac{m}{2}+1\right)^{\text{e}}$  vergelijking onveranderd blijft). Het vereenvoudigde stelsel in zijn geheel, zoowel voor oneven als voor even  $m$ , eene dergelijke verwisseling van onbekenden toelatende, moet dit dus ook met de te vinden waarden dier onbekenden zelve het geval zijn; zoodat in het algemeen  $x_p = x_{m-p+2}$  moet wezen; op grond waarvan men, naarmate  $m$  oneven of even is, slechts  $\frac{m+1}{2}$

of  $\frac{m}{2} + 1$  onbekenden heeft op te lossen uit even zoovele vergelijkingen; waartoe, behalve de allereerste of uitzonderingsvergelijking, nog bij voorbeeld de  $\frac{m-1}{2}$  of  $\frac{m}{2}$  laatste der in

(5') vervatte vergelijkingen te nemen zijn. Onder voorbehoud van in de eerste en in de twee laatste vergelijkingen te schrijven  $x_1 = x_{m+1}$ ,  $x_2 = x_{m+2}$  en  $x_3 = x_{m+3} + B_1$ , en altijd nog in de onderstelling  $B_p$  (voor  $p = 2$  tot  $m$ )  $= 0$ , zijn dan al deze vergelijkingen te beschouwen als ééne gemeenschappelijke functionaalvergelijking (5') telkens tusschen vijf opvolgende uit de onbekenden  $x_1$  tot  $x_{m+3}$ , of, wat hetzelfde zegt, als eene eindige differentievergelijking van de vierde orde. En eene algemeene oplossing van zulk eene vergelijking kan nu — wanneer men, ten einde later halve hoeken te vermijden, dadelijk de notatie  $2\beta$  liever dan  $\beta$  zelf invoert, en door  $C$  en  $c$  nog te bepalen standvastigen verstaat — gegeven worden onder den vorm  $x_p = C \cos 2(c-p)\beta$ , omdat bij substitutie van dezen vorm en van de overeenkomstigen voor  $x_{p-2}$ ,  $x_{p+2}$ ,  $x_{p-1}$  en  $x_{p+1}$  in (5' voor  $B_p = 0$ ) door den veranderlijken factor  $2C \cos 2(c-p)\beta$  kan worden gedeeld; als wanneer tevens blijkt, dat de ingevoerde  $\beta$  aan de van  $p$  onafhankelijke voorwaarde

$\cos 4\beta - (3 + 2 \cos 2q\alpha) \cos 2\beta + \left(1 + 3 \cos 2q\alpha - \frac{A_q}{2}\right) = 0$ ,  
 dat is, wegens  $\cos 4\beta = 2 \cos^2 2\beta - 1$ , aan eene bekende  
 vierkantsvergelijking in  $\cos 2\beta$  behoort te voldoen. Dit wijst  
 er op heen dat, als  $\cos 2\beta'$  de tweede wortel van deze ver-  
 gelijking is, ter volledige oplossing van de beschouwde differen-  
 tievergelijking de vorenstaande  $x_p$  dient vermeerderd te worden  
 met een tweeden overeenkomstigen term  $C' \cos 2(c-p)\beta'$ ;  
 maar tevens kan men opmerken, dat de zoo even berede-  
 neerde bijzonderheid  $x_p = x_{m-p+2}$  dan eischt dat, wat ook  $p$   
 zij, zoowel  $2(c-p)\beta = \pm 2(c-(m-p+2))\beta \pm 2k\pi$  als het  
 overeenkomstige in  $c'$  en  $\beta'$  geldt; en daar hieraan door  
 geene andere standvastige waarden dan  $2c\beta = (m+2)\beta \pm k\pi$ ,  
 en evenzoo in  $c'$  en  $\beta'$ , kan voldaan worden, heeft men —  
 de nu komende standvastigen  $\pm C$  en  $\pm C'$  liever door de  
 enkele letters  $C$  en  $C'$  vervangende — te nemen

$$x_p = C \cos(m-2(p-1))\beta + C' \cos(m-2(p-1))\beta'.$$

Blijft hierin dus nog de bepaling van deze beide  $C$  en  $C'$   
 over; en daartoe moeten — daar thans wegens de verbruikte  
 algemeene voorwaarde  $x_p = x_{m-p+2}$  van zelf reeds aan de eerste  
 der drie gestelde voorwaarden  $x_1 = x_{m+1}$ ,  $x_2 - x_{m+2} = 0$  en  
 $x_3 - x_{m+3} = B_1$  voldaan is — juist de beide laatste dezer  
 voorwaarden dienen. Deze geven

$$\begin{aligned}
 &C \{ \cos(m-2)\beta - \cos(m+2)\beta \} + C' \{ \cos(m-2)\beta' - \\
 &\quad - \cos(m+2)\beta' \} = 0 \text{ en } C \{ \cos(m-4)\beta - \cos(m+4)\beta \} + \\
 &+ C' \{ \cos(m-4)\beta' - \cos(m+4)\beta' \} = B_1, \text{ dat is } C \sin 2\beta \cdot \sin m\beta + \\
 &+ C' \sin 2\beta' \cdot \sin m\beta' = 0 \text{ en } C \sin 4\beta \cdot \sin m\beta + C' \sin 4\beta' \cdot \sin m\beta' = \frac{B_1}{2},
 \end{aligned}$$

$$\text{waaruit } C \sin 2\beta \cdot \sin m\beta = -C' \sin 2\beta' \cdot \sin m\beta' = \frac{B_1}{4(\cos 2\beta - \cos 2\beta')};$$

zoodat ten slotte de oplossing van het meergenoemde vereen-  
 voudigde stelsel vergelijkingen (5') gegeven wordt door de  
 formule

$$4x_p(\cos 2\beta - \cos 2\beta') = B_1 \left\{ \frac{\cos(m-2(p-1))\beta}{\sin 2\beta \cdot \sin m\beta} - \frac{\cos(m-2(p-1))\beta'}{\sin 2\beta' \cdot \sin m\beta'} \right\}.$$

Zoover gevorderd zijnde, en thans terugkeerende tot het oor-  
 spronkelijke stelsel (5') zelf met alle daarin voorkomende  
 willekeurige gegevens  $B_p$ , kan men (om het boven reeds  
 gezegde omtrent de algemeene  $x_p$  als algebraïsche som toe te

passen) opmerken, dat  $x_p$  opvolgend van ieder der verdere gegevens  $B_2, B_3$ , enz.,  $B_p, B_{p+1}$ , enz.,  $B_m$  moet afhangen op dezelfde wijze als opvolgend  $x_{p-1}, x_{p-2}$ , enz.,  $x_1, x_m$ , enz.,  $x_{p+1}$  afhangen van  $B_1$ ; men kan daarom volstaan met in het tweede lid der evengevonden formule  $p$  achtereenvolgens te vervangen door  $p-1, p-2$ , enz.,  $1, m$ , enz.,  $p+1$ , en al de uitkomsten te voegen bij dat tweede lid zelf. En daar — voor zoover den eersten term betreft — alsdan voor

$$B_1 \cos(m-2(p-1))\beta + B_2 \cos(m-2(p-2))\beta + \text{enz.} + B_p \cos m\beta + B_{p+1} \cos(m-2(m-1))\beta + \text{enz.} + B_m \cos(m-2p)\beta$$

ook kan geschreven worden  $\sum_1^m k B_{p+k} \cos(m-2k)\beta$  — ter-

wijl voor den tweeden term het dergelijke geldt — is men gerechtigd tot het besluit, dat het oorspronkelijke stelsel (5') wordt opgelost door de formule

$$4 x_p (\cos 2\beta - \cos 2\beta') = \frac{1}{\sin 2\beta \cdot \sin m\beta} \sum_1^m k B_{p+k} \cos(m-2k)\beta -$$

$$- \frac{1}{\sin 2\beta' \cdot \sin m\beta'} \sum_1^m k B_{p+k} \cos(m-2k)\beta',$$

waar in het tweede lid de overeenkomst in vorm van ieder der beide termen met de boven sub II voor den enkelen driehoekskring gevonden formule (3) vooral dán onmiskenbaar is, wanneer men opmerkt, dat ook hier zoowel de sommatiegrenzen 1 en  $m$  door 0 en  $m-1$ , als de notatie  $B_{p+k}$  door  $B_{p-k}$  zouden mogen vervangen worden, en dat ook hier  $\sin 2\beta \cdot \sin m\beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(m+2)\beta - \cos(m-2)\beta \}$ , en evenzoo in  $\beta'$ , zou kunnen geschreven worden. Nadat op deze wijze de willekeurige onbekende  $x_p$  in functie van de ingevoerde hulpgrootheden  $B$  is uitgedrukt, kan men ten slotte tot de oorspronkelijke gegevens  $a$  en  $b$  van het vraagstuk terugkeeren. Daarbij met name er op lettende, dat — blijkens de sub V in het algemeene of onregelmatige geval aangenomen notatie — thans voor de regelmatige figuur bij  $a_{p-1}, a_p, a_{p+1}$  behooren niet  $b_{p-1}, b_p, b_{p+1}$ , maar  $b_{p-q}, b_p, b_{p+q}$ , en dus bij  $a_{p+k}$  behoort  $b_{p+kq}$ , heeft men op grond



van de aan  $B_p$  in (5') toegekende beteekenis te schrijven

$$\sum_1^m k B_{p+k} \cos(m-2k)\beta = \sum_1^m k \left\{ -a_{p+k-1} + 2a_{p+k} \cos 2q\alpha - \right. \\ \left. -a_{p+k+1} + A_q b_{p+kq} + \sum_1^{q-1} k' A_{k'} (b_{p+(k-1)q+k'} + b_{p+(k+1)q-k'}) \right\} \cos(m-2k)\beta.$$

In deze som wordt vooreerst de volledige coëfficiënt van één en denzelfden term  $a_{p+k}$  gelijk aan  $-\cos(m-2(k+1))\beta + 2\cos 2q\alpha \cdot \cos(m-2k)\beta - \cos(m-2(k-1))\beta = 2(\cos 2q\alpha - \cos 2\beta) \cos(m-2k)\beta$ ; terwijl ten andere de som van alle binnen het dubbele  $\Sigma$ -teeken (in  $k$  en in  $k'$ ) staande termen — die hier twee aan twee volgens een gemeenschappelijken coëfficiënt  $A_{k'}$  bijeengevoegd voorkomen — ook als som van termen, gerangschikt telkens volgens een zelfde gegeven  $b_{p+kq+k'}$ , kan worden voorgesteld: immers daartoe in den eersten term in  $A_{k'}$  vervangende  $k$  door  $k+1$ , in den tweeden daarentegen  $k'$  door  $q-k'$ , wordt dit geheele ge-

deelte ook gelijk aan  $\sum_1^m k \sum_1^{q-1} k' \{ A_{k'} \cos(m-2(k+1))\beta + A_{q-k'} \cos(m-2k)\beta \} b_{p+kq+k'}$ . Een en ander substitueerende, en vervolgens geheel overeenkomstige vormen in  $\beta'$  in plaats van  $\beta$  in mindering brengende, komt alzoo als slotsom van het thans ingestelde bijzondere onderzoek de formule

$$4x_p(\cos 2\beta - \cos 2\beta') = \frac{1}{\sin 2\beta \cdot \sin m\beta} \left[ 2(\cos 2q\alpha - \cos 2\beta) \sum_1^m k a_{p+k} \cos(m-2k)\beta + \right. \\ \left. + A_q \sum_1^m k b_{p+kq} \cos(m-2k)\beta + \right. \\ \left. + \sum_1^m k \left\{ \cos(m-2(k+1))\beta \sum_1^{q-1} k' A_{k'} b_{p+kq+k'} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(m-2k)\beta \sum_1^{q-1} k' A_{q-k'} b_{p+kq+k'} \right\} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sin 2\beta' \cdot \sin m\beta'} \left[ 2(\cos 2q\alpha - \cos 2\beta') \sum_1^m k a_{p+k} \cos(m-2k)\beta' + \right. \\
& \quad + A_q \sum_1^m k b_{p+kq} \cos(m-2k)\beta' + \\
& \quad + \sum_1^m k \left\{ \cos(m-2(k+1))\beta' \sum_1^{q-1} k' A_{q-k'} b_{p+kq+k'} + \right. \\
& \quad \left. \left. + \cos(m-2k)\beta' \sum_1^{q-1} k' A_{q-k'} b_{p+kq+k'} \right\} \right].
\end{aligned}$$

De opmerking moge hier nog eene plaats vinden, dat wel is waar, evenals aan het slot van V meer in het algemeen werd gezegd, de vorenstaande formule hare geldigheid zou behouden zelfs voor de gevallen van slechts  $m=4$  of  $m=3$  binnendriehoeken, als wanneer de vergelijking (5) in plaats van vijf slechts vier of drie onbekenden zou bevatten; maar dat juist in deze meest eenvoudige gevallen de rechtstreeksche oplossing van deze onbekenden uit de even zoovele beschikbare vergelijkingen — dat is, gelet weder op  $x_p = x_{m-p+2}$ , in wezenlijkheid de oplossing van slechts drie of twee onbekenden — in den regel wel eenvoudiger zal afloopen dan de toepassing van de gevonden goniometrische formule.

Ten aanzien van driehoeksnetten, van minder regelmatigen of van meer samengestelden vorm dan die in het voorgaande sub I—VIII doorloopen werden, valt in het algemeen nog te zeggen, dat waarschijnlijk dikwijls de gelegenheid zal bestaan, deze door eene doorgaande afscheidingslijn in twee netten van de beschouwde of van andere eenvoudige vormen te verdeelen. Die afscheidingslijn zal dan bij voorbeeld uit  $n$  aan elkander sluitende zijden bestaan, ieder gemeen aan één van  $n$  driehoeken van het eene en aan één van  $n$  driehoeken van het andere gedeeltelijke net. Eene rekenwijze, verwant

aan de reeds sub III, IV, VII en VIII toegepaste, kan in dergelijke gevallen vermoedelijk dikwijls van dienst zijn. Want maakt men eerst als boven de formules op voor de onbekenden van ieder der  $2n$  bedoelde aansluitingsdriehoeken in de onderstelling, dat alleen dát gedeeltelijke net, waartoe die driehoek zelf behoort, aanwezig zou zijn; en gaat men vervolgens tot de aanéenkoppeling der beide deelen tot het werkelijk gegeven driehoeksnet over; dan veranderen alleen de vergelijkingen van al deze  $2n$  aansluitingsdriehoeken, en wel in dier voege, dat voor ieder dezer driehoeken de gegeven waarde vermeerderd wordt met de nog te vinden werkelijke onbekende van den aansluitenden driehoek van het andere net. Door dus in ieder der  $2n$  bedoelde formules de daarin voorkomende gegevens van de  $n$  tot aansluiting gebrachte driehoeken van het bijbehorende net te vervangen als zoo even gezegd, beschikt men over  $2n$  vergelijkingen tusschen de  $2n$  werkelijke onbekenden van de gezamenlijke aansluitingsdriehoeken; en deze hoofdonbekenden hieruit opgelost zijnde, worden dan ook alle verdere onbekenden gevonden.

In denzelfden trant zou zelfs naar omstandigheden sprake kunnen zijn van de verdeeling van een gegeven samengesteld net in meer dan twee gedeeltelijke.

---

# VOLLEDIGE BEREKENING VAN „HET SCHIMMEL- OF KLOK- EN HAMERSPEL”,

DOOR

**Dr. G. J. D. MOUNIER.**

In ditzelfde deel van het Nieuw Archief komt eene berekening van het »Schimmel- of Klok- en Hamerspel” door Dr. H. EKAMA voor, waarmede ik mij moeielijk kan vereenigen. Het komt mij voor, dat Dr. EKAMA bij zijne beschouwingen enkele onjuistheden heeft begaan, en daardoor tot uitkomsten is gekomen, die aan eenige bedenking onderhevig zijn. Het is daarom, dat ik mij thans voorstel in de eerste plaats mijne bedenkingen tegen Dr. EKAMA's beschouwingen te ontwikkelen, om daarna te trachten op eene andere en, naar ik meen, meer nauwkeurige wijze dit vraagstuk te behandelen.

Onze eerste bedenking is gericht tegen de uitdrukking

$$\frac{5^2 \times 21 \times 6^5 - 5^8}{6^8} m; \dots \dots \dots (1)$$

welke, volgens den schrijver — zie blz. 110 reg. 6 v. o. — voorstelt, hetgeen de gezamenlijke spelers voor  $m$  worpen ontvangen.

Even te voren is gevonden, dat voor een worp de waarschijnlijke winst is

$$\frac{5^2 \times 21 \times 6^5 - 5^8}{6^8}, \dots \dots \dots (2)$$

en hieruit is de waarde der  $m$  worpen afgeleid. De uitdrukking (2) geldt echter in de onderstelling, dat bij een bepaalden worp, onverschillig welke der getallen van 1 tot en met 21 verkregen worden, steeds zooveel penningen uit de kas worden genomen als er oogen worden geworpen. In het begin van het spel, zoolang namelijk de kas minstens 21 penningen bevat, zal dit inderdaad het geval zijn; maar zoodra het aantal penningen minder dan 21 wordt, zullen de worpen in waarde afnemen, daar de hoogste worpen dan geen uitbetaling uit de kas meer zouden opleveren; en deze laatste worpen alleen daardoor nog niet tot uitputting van de kas voeren, wjl zij toevalliger wijze minder oogen geven, dan het aantal penningen, dat nog in de kas aanwezig is.

Heeft men bij voorbeeld na de verrekening van den 28<sup>sten</sup> worp nog 20 penningen in de kas; heeft men verder, dat de 29<sup>ste</sup> worp 12, de 30<sup>ste</sup> 6 en de 31<sup>ste</sup> 5 oogen geeft, dan is wel na  $m = 30$  worpen de kas eerst uitgeput, maar de waarde van den 29<sup>sten</sup> en 30<sup>sten</sup> worp is dan niet meer

$$\frac{5^2 \times 21 \times 6^5 - 5^8}{6^8},$$

daar bij die worpen de hoogere aantallen oogen niet meer tot eene uitbetaling hadden kunnen voeren. Deze toestand kan zelfs bij verscheidene worpen intreden, en derhalve is de waarde der  $m$  worpen belangrijk minder dan het door Dr. EKAMA gevonden bedrag,

$$\frac{5^2 \times 21 \times 6^5 - 5^8}{6^8} m.$$

Eene tweede bedenking geldt de bepaling van  $I' = n I$ . Hiervoor neemt de schrijver de waarde (1), door mij bestreden, vermindert met  $H_u$ , de waarde van het huis. Afgezien van de onnauwkeurigheid van (1) is deze waarde van  $I'$  mijn inziens onjuist, daar ook, nadat de kas is uitgeput (en alzoo het voordeel van het huis een aanvang neemt), nog verscheidene worpen kunnen voorkomen, waarbij de kas aan de spelers moet uitkeeren. De waarde dezer uitkeeringen moest dus nog bij  $I'$  worden opgeteld. Opmerkelijk is het, dat de schrijver deze ontvangst bij het mededeelen van de regels van het spel uitdrukkelijk vermeldt — blz. 108,

reg. 6 v. b. — en toch de waarde van dit voordeel der spelers niet in de berekening van  $I'$  opneemt.

Eene derde bedenking geldt — blz. 112, reg. 1 v. b. — de bewering dat het groote voordeel, dat de schimmel oplevert, waarschijnlijk het gevolg is van de onzuiverheid der dobbelsteen. Mij komt dit vermoeden ongegrond voor. Het is ongetwijfeld waar, dat de steenen, welke bij dit spel worden geleverd, gewoonlijk vrij onnauwkeurig zijn; maar, wanneer men een groot aantal dergelijke spelen gebruikt, zal de onnauwkeurigheid bij het eene spel bij voorbeeld het schimmelen bevorderen, bij het andere daarentegen belemmeren. Op een groot aantal spelen, bij voorbeeld al de spelen in Nederland, zal voldoende compensatie ontstaan; zoodat ten slotte verhoudingen zullen verkregen worden, die overeenstemmen met die, welke aan zuivere dobbelsteen zouden beantwoorden. Ter gelegener tijd komen wij hierop terug.

Ten slotte hebben wij nog eene vierde bedenking. Op blz. 112, reg. 11 v. o. leest men: »Werden er  $6^6 - 5^6$  worpen gedaan, dan zou het huis ontvangen  $21 \times 6^5 - (6^6 - 5^6) = 131265^1$  penningen; bijgevolg is de waarschijnlijke winst voor het huis in één worp  $\frac{131265^1}{6^6 - 5^6}$  en dus voor  $\frac{6^6 - 5^6}{5^5}$  worpen  $\frac{131265^1}{5^5}$  of 42.”

Ook deze beschouwing komt mij voor onjuist te zijn. Op  $6^6 - 5^6$  komen ook  $5^5$  worpen 1 voor. Deze worp doet echter onmiddellijk het spel ophouden. Heeft men dus een serie van  $6^6 - 5^6$  worpen, dan moet de worp 1 daar in niet voorkomen, daar met dezen worp de serie niet zou kunnen bestaan. De worp 1 speelt dus eene eigenaardige rol, waarop mijn inziens door Dr. EKAMA niet is gelet. Spoedig zal blijken dat wij, hierop wel lettende, iets geheel anders vinden<sup>2)</sup>.

Na deze bedenkingen tegen de beschouwingen van Dr.

1) Lees: 132265.

2) Passen wij op deze berekening van Dr. EKAMA en de onze (10) voorkomende op blz. 196 de methode gevolgd bij het schema op blz. 204 toe, dan bevestigt dit de juistheid van onze uitkomst.

Ekama in het midden te hebben gebracht en nog te hebben opgemerkt, dat het vraagstuk slechts voor één bijzonder geval geheel tot het einde toe is opgelost (namelijk dat, waarin na de verrekening van den  $m^{\text{den}}$  worp juist 1 in kas overblijft), trachten wij eene algemeene oplossing voor dit vraagstuk te vinden.

Wij moeten daartoe eerst de waarschijnlijkheid berekenen, dat men na een zeker aantal worpen een bedrag  $x$  penningen, zijnde  $x < 21$  in de kas heeft. In hetzelfde spel kan  $x$  meerdere waarden verkrijgen. Ieder bedrag kleiner dan 21, dat bij de laatste worpen in de kas wordt aangetroffen, geeft eene waarde van  $x$ .

Wat is nu noodig, opdat op zeker oogenblik de kas juist  $x$  penningen bevat? Eenvoudig niets anders dan dat, als de kas oorspronkelijk  $P$  penningen inhield, daaraan door al de overige worpen te zamen juist  $P - x$  penningen onttrokken zijn. De waarschijnlijkheid, dat men na zeker aantal worpen juist  $x$  penningen in de kas overhoudt, is dus gevonden, als men de waarschijnlijkheid kent, dat in dat aantal worpen  $P - x$  penningen zijn uitbetaald. Beide waarschijnlijkheden zijn aan elkander gelijk.

Wat de uitbetalingen der kas betreft is het onverschillig of er geschimmeld wordt of niet, en evenzoo of de uitbetalingen geschieden aan den speler of aan den houder van klok, hamer of klok en hamer. Wordt er geschimmeld, dan verandert aan de kas niets, en is het alzoo hetzelfde als of deze worp niet is gedaan. Wat de uitbetaling betreft, blijft het voor de uitputting der kas onverschillig, wie de rechthebbende is. Wij kunnen dus eenvoudig de worpen, waarbij geschimmeld wordt, als niet bestaande beschouwen — althans wat het tegenwoordig onderzoek betreft — en de steenen met klok en hamer buiten beschouwing laten. Wij beschouwen dan nu de  $6^{\text{e}}$  —  $5^{\text{e}}$  worpen met de zes overschietende steenen, die de getallen 1 tot en 21 opleveren. Dat er iets geworpen wordt alzoo zeker zijnde, hebben wij volgens Dr. Ekama — blz. 109 — terecht, dat de waarschijnlijkheden voor de worpen 1, 2, 3 enz., die wij achter-eenvolgens  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  enz. noemen zullen, zijn

$$\omega_1 = \frac{3125}{6^6 - 5^6}, \omega_2 = \frac{3125}{6^6 - 5^6}, \omega_3 = \frac{3750}{6^6 - 5^6}, \text{ enz.}$$

Dr. EKAMA geeft deze waarschijnlijkheden tot en met den worp 21; zoodat  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{20}, \omega_{21}$  allen bekende groot-heden zijn.

Nu is de waarschijnlijkheid, dat in  $\pi$  worpen juist  $P - x$  geworpen wordt, volgens DE MOIVRE

$$N_1 \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \dots + N_2 \omega_1^{\alpha_2} \omega_2^{\beta_2} \dots + \dots,$$

zijnde

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 + \dots = \pi, \\ \alpha_2 + \beta_2 + \dots = \pi, \\ \text{enz.} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

en

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1 + \dots = P - x, \\ \alpha_2 + 2\beta_2 + 3\gamma_2 + \dots = P - x, \\ \text{enz.} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

en bovendien

$$N_1 = \frac{\pi!}{\alpha_1! \beta_1! \dots}, N_2 = \frac{\pi!}{\alpha_2! \beta_2! \dots} \text{ enz.}$$

Men vindt zooveel stellen waarden voor  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  als er oplossingen zijn voor de onbepaalde vergelijkingen (3) en (4), waarin de grootheden  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  geheel en positief moeten zijn; zoodat, daar  $\pi$  en  $P - x$  eindig zijn, slechts een bepaald aantal oplossingen zal worden gevonden. Daar wij hier echter geheel in het midden laten, hoeveel worpen er gedaan worden, kan  $\pi$  alle waarden hebben, die met het oog op (4) mogelijk zijn, en vervallen dus de voorwaarde-vergelijkingen (3).

Het aantal oplossingen voor de bij elkander behoorende waarden  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  neemt nu sterk toe; maar blijft toch eindig. In den teller der waarden van  $N_1, N_2$  en zoo voort moet men nu  $\pi!$  vervangen door  $(\alpha + \beta + \gamma \dots)!$ , deze letters voorzien zijnde van de indices, die zij in den bijbehoorenden noemer hebben.

Men vindt zoodoende

$$\Omega_x = N_1 \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \dots + N_2 \omega_1^{\alpha_2} \omega_2^{\beta_2} \dots + \dots,$$

zijnde (4) van kracht en



$$N_1 = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 + \dots)!}{\alpha_1! \beta_1! \dots}, \quad N_2 = \frac{(\alpha_2 + \beta_2 + \dots)!}{\alpha_2! \beta_2! \dots} \text{ enz.}$$

Het berekenen der waarden  $\Omega_x$ , ofschoon een tijdroovend werk, levert geen theoretische moeielijkheid meer op en kan voor iedere waarde van  $P - x$  gemakkelijk geschieden. Gaan wij steeds uit van een zelfde waarde van  $P$ , dan hangt  $\Omega_x$  alleen van  $x$  af; zoodat de waarden van  $\Omega$  voor al de waarden van 0 tot 21 vooruit gemakkelijk kunnen worden bepaald. De  $\Omega$ 's zijn dus verder reeds berekende grootheden.

Men merke nog op, dat  $\Omega_x$  alleen dan de waarschijnlijkheid aangeeft, dat op zeker oogenblik  $x$  penningen in de kas zijn, als nog geen worpen zijn voorgekomen, waarbij meer oogen zijn verkregen, dan er penningen in de kas zijn. Immers door een dergelijken worp, die, als behoorende tot het totaal der mogelijke gevallen  $6^6 - 5^6$ , die wij beschouwen, niet mag worden uitgesloten, zou het getal  $P - x$  reeds zijn overtroffen.

De waarschijnlijkheid, dat bij  $x$  oogen het huis begint te trekken, is de samengestelde waarschijnlijkheid, dat  $x$  penningen in de kas overblijven, zonder dat vóór dien tijd een worp is voorgekomen, waarbij het aantal oogen het nog beschikbaar aantal penningen overtrof, en dat juist nu dit laatste gebeuren zal. De waarschijnlijkheid hiervoor is

$$\omega'_x = \omega_{x+1} + \omega_{x+2} + \dots + \omega_{21},$$

en dus is de samengestelde waarschijnlijkheid voor het feit, dat het huis begint te trekken, als er juist nog  $x$  penningen in de kas zijn,

$$\Omega'_x = \Omega_x \omega'_x.$$

De grootheden  $\Omega_x$  en  $\omega'_x$  reeds bekend zijnde, laten zich dus de  $\Omega'_x$ 's vooruit berekenen.

Dit alles zoo zijnde, gaan wij thans berekenen, wat men zelf kan trekken, als er op 't oogenblik, dat het voordeel van het huis begint, nog  $x$  penningen in de kas zijn.

Al de penningen worden vroeg of laat aan de spelers uitbetaald, hetzij in eens, hetzij bij gedeelten, want van af dit oogenblik wordt er niet meer geschimmeld en vervallen de voordeelen voor klok, hamer en klok en hamer.

De kas ontvangt niets meer en het spel eindigt eerst als al de penningen aan de spelers zijn uitbetaald.

De spelers genieten dus zeker nog te zamen het voordeel  $x$ , of iedere speler afzonderlijk gemiddeld het voordeel  $\frac{x}{n}$ , indien men den invloed van de orde, waarin de spelers het spel beginnen, buiten rekening laat. Deze omstandigheid oefent echter slechts invloed uit op de onderlinge verhouding der verschillende spelers en geenszins op de verhouding van de kas en de verschillende kaarten tot de spelers te zamen genomen.

Bij deze berekening is aangenomen dat het spel zeker eenmaal eindigt. Dat dit gebeurt heeft eene waarschijnlijkheid, die tot de zekerheid grenst en praktisch daarmede gelijk gesteld kan worden. Zeker in den meest volstrekten zin is dit echter niet; want de mogelijkheid is niet uitgesloten, dat men steeds blank werpt of meer oogen dan nog penningen in kas zijn. Het ergste wordt dit als nog slechts ééne penning in kas is, daar dan de waarschijnlijkheid om 1 te werpen  $\frac{5^6}{6^6}$  is. Dat men in bij voorbeeld 10000 keeren toch eindelijk eens 1 zal werpen is het complement van de waarschijnlijkheid, dat men in 10000 worpen geen enkele maal 1 verkrijgt, alzoo

$$1 - \left( \frac{6^6 - 5^6}{6^6} \right)^{10000},$$

welke waarde reeds bijna 1 is. Met het oog op de praktijk behoeft dus op deze omstandigheid niet te worden gelet. Daar men overigens het aantal worpen zoo groot kan nemen als men verkiest, kan men de eenheid onbepaald dicht naderen en alzoo zijn al de door ons te verkrijgen waarden, als grenswaarden beschouwd, ook theoretisch volkomen juist. Het eenige bezwaar, dat zou kunnen worden aangevoerd; is, dat wellicht op zeker oogenblik de spelers niet meer aan het huis zouden kunnen betalen. Omtrent het vermogen der spelers heeft echter Dr. EKAMA niets ondersteld en alzoo feitelijk aangenomen, dat zij onbepaald kunnen voortgaan met betalen, zij het dan ook in den vorm van schuldbekentenissen.

Berekenen wij thans, wat bij den aanvang van het spel de waarde is of wiskundige hoop voor de gezamentlijke spelers, als gevolg van de voordeelen, die zij nog genieten kunnen, als het huis, zoo dat gebeurt, begint te trekken.

De waarschijnlijkheid, dat deze omstandigheid plaats heeft, als er nog slechts  $x$  penningen in de kas zijn, is  $\Omega'_x$ ; en is dit het geval, dan zullen de spelers nog het voordeel  $x$  genieten. De wiskundige hoop is dus voor iedere waarde van  $x$   $\Omega'_x x$  en dus voor al de waarden van  $x$  te zamen

$$H'_s = \sum_{x=1}^{x=21} \Omega'_x x \dots \dots \dots (5)$$

$H'_s$  is dus de wiskundige hoop op winst, die de spelers bij den aanvang van het spel hebben, met het oog op de voordeelen, die zij mogelijk nog kunnen behalen, nadat het schimmelen ophoudt.

Gaan wij nu na, welke de voordeelen van het huis zijn, als er  $x$  penningen in kas zijn. Er zullen zoolang  $x$  penningen in kas blijven, als geen der getallen beneden  $x+1$  geworpen worden. De blanco worpen wederom niet mede tellende, daar zij toch geen invloed uitoefenen in welken zin dan ook, hebben wij voor iederen worp, dat de waarschijnlijkheid, dat meer dan  $x$  geworpen wordt, is  $\omega'_x$ ; en dus, dat  $x$  of minder wordt geworpen,  $1 - \omega'_x$ . De waarschijnlijkheid, dat eerst bij den  $p^{\text{den}}$  worp  $x$  of minder dan  $x$  geworpen wordt, is alzoo

$$\Phi_p = \omega'_x p^{-1} (1 - \omega'_x) \dots \dots \dots (6)$$

Gaan wij nu na, hoeveel iedere worp waard is, zoolang  $x$  penningen in kas zijn en het huis trekt. In  $6^s - 5^s$  worpen wordt  $(6^s - 5^s) \omega_{x+1}$  maal  $x+1$ ,  $(6^s - 5^s) \omega_{x+2}$  maal  $x+2 \dots (6^s - 5^s) \omega_{21}$  maal 21 geworpen, in welke gevallen het huis achtereenvolgens 1, 2  $\dots (21 - x)$  ontvangt. In het geheel zou dus het huis in  $6^s - 5^s$  worpen ontvangen

$$(6^s - 5^s) \{ \omega_{x+1} + 2 \omega_{x+2} + \dots + (21 - x) \omega_{21} \},$$

en dus per worp gemiddeld

$$\omega_{x+1} + 2 \omega_{x+2} + \dots + (21 - x) \omega_{21}.$$

Hiervoor zou men kunnen schrijven

$$\omega'_x + \omega'_{x+1} + \omega'_{x+2} + \dots + \omega'_{21}.$$

Men vindt dus voor de waarde van iederen worp gemiddeld

$$\omega''_{x+1} = \omega'_x + \omega'_{x+1} + \omega'_{x+2} + \dots + \omega'_{21} \dots (7)$$

Houdt nu het huis eerst bij den  $p^{\text{den}}$  worp, wegens het aanwezig zijn van  $x$  penningen in de kas met te trekken, dan hebben er  $p - 1$  worpen plaats gehad, die ieder een gemiddeld voordeel van  $\omega''_{x+1}$  en alzoo te zamen het voordeel  $(p - 1) \omega''_{x+1}$  aanbrachten. De waarschijnlijkheid, dat dit gebeurt, volgens (6)  $\Phi_p$  zijnde, is de wiskundige hoop voor dit geval  $(p - 1) \Phi_p \omega''_{x+1}$ . Nu kan echter  $p$  alle waarden hebben, zoodat de wiskundige hoop voor alle waarden van  $p$  wordt

$$h_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} (p - 1) \Phi_p \omega''_{x+1} \dots (8)$$

Daar  $\omega''_{x+1}$  en de factor  $(1 - \omega'_x)$  van  $\Phi_p$  niet met  $p$  verandert, kan men hiervoor ook schrijven, lettende op (6),

$$h_x = (1 - \omega'_x) \omega''_{x+1} \sum_{p=1}^{p=\infty} (p - 1) \omega'_x{}^{p-1} \dots (9)$$

Voor de termen onder het sommatieteecken heeft men nu

$$1 \cdot \omega'_x + 2 \cdot \omega'_x{}^2 + 3 \cdot \omega'_x{}^3 + \dots,$$

of de dubbelreeks

$$\left. \begin{aligned} \omega'_x + \omega'_x{}^2 + \omega'_x{}^3 + \dots \\ + \omega'_x{}^2 + \omega'_x{}^3 + \dots \\ + \omega'_x{}^3 + \dots \\ \dots \end{aligned} \right\} = \begin{cases} \omega'_x : (1 - \omega'_x), \\ \omega'_x{}^2 : (1 - \omega'_x), \\ \omega'_x{}^3 : (1 - \omega'_x), \\ \dots \end{cases}$$

De som der tweede leden van deze vergelijkingen is

$$(\omega'_x + \omega'_x{}^2 + \omega'_x{}^3 + \dots) : (1 - \omega'_x) = \frac{\omega'_x}{(1 - \omega'_x)^2}.$$

Dit substitueerende in (9) vinden wij

$$h_x = \frac{\omega'_x \omega''_{x+1}}{1 - \omega'_x} \dots (10)$$

Dit is alzoo de wiskundige hoop voor het huis, als het een feit is, dat er  $x$  penningen in de kas zijn.

Wij weten reeds dat de waarschijnlijkheid, dat het huis begint te trekken, als er  $x$  penningen in de kas zijn,  $\Omega'_x$  bedraagt.

Wij moeten thans onderzoeken, welke de waarschijnlijk-

heid is, dat, indien dit feit werkelijk plaats heeft, ieder der aantallen penningen beneden de  $x$  worden verkregen.

Nemen wij daartoe in het algemeen  $y < x$ , en stellen wij door  $\omega(\alpha, a)$ , evenals vroeger door  $\omega_\alpha$ , de waarschijnlijkheid voor van den worp  $\alpha$ ; doch nu in de onderstelling, dat de worpen boven de  $a-1$  thans, bij de gunstige zoowel als ongunstige gevallen, niet mede tellen.

Zij nu  $\Psi_y$  de som van de producten van  $\omega(\alpha, a)$ ,  $\omega(\beta, b)$ , ...  $\omega(\pi, p)$ , waarin  $\alpha, \beta, \gamma \dots \pi$  al de getallen van 1 tot en met  $(x-1)$  voorstellen, met herhalingen, zoodat verschillende letterteekens dezelfde getallenwaarde als eerste index kunnen aangeven; doch waarin steeds de eerste index van denzelfden factor kleiner moet zijn dan de tweede en de tweede index steeds voorstelt: in den eersten factor de waarde  $x$ , waarvan men uitgaat, in den tweeden factor  $x-\alpha$ , in den derden  $x-\alpha-\beta \dots$  in den laatsten  $y+\pi$ , zijnde  $y$  de index van  $\Psi$ . Voor  $y = x-\alpha-\beta-\gamma \dots -\pi$ , heeft men nu ook, dat de tweede index van den laatsten factor  $y+\pi$  gelijk wordt aan  $x-\alpha-\beta-\dots$  met weglating van  $\pi$ , dus geheel in overeenstemming met de vormen, die wij voor de tweede indices van de overige factoren vonden.

Voeren wij nu werkelijk de voorwaarde

$$y = x - \alpha - \beta - \gamma \dots - \pi$$

in, dan stelt  $\Psi_y$  de waarschijnlijkheid voor, dat, als het huis bij  $x$  penningen in kas begint te trekken, of juister begint te spelen, na een of meer worpen  $y$  penningen in kas zullen zijn. De berekening van  $\Psi_y$  verschilt van die van  $\Omega_x$ , die daarmede groote overeenstemming vertoont, hierin, dat daarbij de waarschijnlijkheid voor de worpen van hetzelfde aantal oogen steeds dezelfde was; terwijl hier die waarde verandert en grooter wordt, naarmate het aantal penningen in de kas kleiner zal geworden zijn. Hier toch moeten de gevallen, waarin meer oogen geworpen worden dan er penningen in de kas zijn, worden uitgesloten, aangezien in die gevallen de kas niet verandert; hetgeen bij het ongewijzigd gebruik van de berekeningswijze van DE MOIVRE ondersteld zou worden wel het geval te zijn. Die worpen dus niet mede tellende, moeten zij, zoowel van het aantal gunstige

als van het geheel aantal gevallen, dat aan de  $\omega$ 's ten grondslag ligt, worden uitgezonderd.

Rest dus nog om  $\Psi_y$  volledig te kennen, de  $\omega(\alpha, a)$ ,  $\omega(\beta, b)$  enzovoort te berekenen. Men vindt die eenvoudig door als geheel aantal gevallen te nemen  $(6^6 - 5^6)(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{a-1})$  en als het aantal gunstige gevallen  $(6^6 - 5^6)\omega_a$ . Het eerste vindt men door optelling van de getallen in de laatste kolom van blz. 109 van meer genoemd stuk van Dr. EKAMA tot en met het getal, behoorende bij  $a - 1$  oogen; terwijl het tweede in die kolom onmiddellijk te vinden is. Men heeft alzoo

$$\omega(\alpha, a) = \frac{\omega_a}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{a-1}}, \quad \omega(\beta, b) = \frac{\omega_\beta}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{b-1}} \text{ enz.}$$

De wiskundige hoop voor het huis is nu, als het begint te spelen met  $x$  penningen in kas, voor  $y$  penningen, die mogelijk daarin nog zullen kunnen overblijven,

$$\Psi_y h_y \dots \dots \dots (11)$$

en dus voor alle waarden van  $y$

$$h_{(x)} = \sum_{y=1}^{y=x} \Psi_y h_y, \dots \dots \dots (12)$$

als wij  $\Psi_x = 1$  stellen, omdat dan geen enkele der factoren  $\omega(\alpha, a)$ ,  $\omega(\beta, b)$  enz. kan voorkomen.

Alzoo stelt  $h_{(x)}$  de wiskundige hoop van het huis voor, als het een feit is, dat het huis bij  $x$  penningen in kas begint te spelen; terwijl  $h_x$  de wiskundige hoop voorstelt voor de winsten, die het huis kan behalen, zoolang er juist  $x$  penningen in kas zijn.

Wij vonden, dat bij het begin van 't spel de waarschijnlijkheid, dat het huis bij  $x$  penningen in kas begint te spelen,  $\Omega'_x$  is. De wiskundige hoop van de winst, die het huis kan behalen door mogelijk met  $x$  penningen in kas zijn spel te beginnen, is in het begin van het spel alzoo

$$\Omega'_x h_{(x)} \dots \dots \dots (13)$$

De wiskundige hoop van het huis is dus in 't begin van 't spel, onafhankelijk van het aantal penningen, dat in de kas zal zijn, als het huis begint te trekken, zelfs onafhankelijk van de vraag, of het wel eens aan de beurt van spelen komt,

$$H_{hu} = \sum_{x=1}^{x=21} \Omega'_x h_{(x)} \dots \dots \dots (14)$$

Gaan wij nu na, wat er gebeurt in het eerste gedeelte van het spel, dat gedeelte namelijk, waarin nog geschimmeld kan worden en het huis nog niet speelt.

Dit gedeelte van het spel begint met  $P$  penningen in de kas en eindigt, als dat aantal gedaald is op  $x$ . Er worden dus door de spelers en de klok, den hamer en de klok en hamer te zamen  $P - x$  penningen verdiend, wanneer men het verlies, door het schimmelen ontstaan, vooralsnog buiten rekening laat. De twee steenen met figuren beslissen bij iederen worp, of de speler, dan wel een der figuurkaarten zal winnen. De waarschijnlijkheid, dat men met die twee steenen de klok of den hamer werpt, is voor ieder hunner  $\frac{5}{36}$ ; de waarschijnlijkheid, dat men klok en hamer werpt  $\frac{1}{36}$ ; en die, dat men ten voordeele van de spelers werpt  $\frac{25}{36}$ . Alzoo komt den spelers van de behaalde winst

$$\frac{25}{36} (P - x),$$

de klok en den hamer ieder

$$\frac{5}{36} (P - x),$$

en de klok en hamer

$$\frac{1}{36} (P - x)$$

toe.

De waarschijnlijkheid, dat het huis bij  $x$  penningen in kas zal beginnen te spelen  $\Omega'_x$  zijnde, zal ook de waarschijnlijkheid, dat in het eerste gedeelte van het spel uit de kas  $P - x$  gewonnen wordt,  $\Omega'_x$  zijn. De wiskundige hoop op winst ten gevolge van het overblijven van  $x$  penningen in de kas, als het huis begint te trekken, zal dus in het begin van het spel zijn:

$$\text{voor de spelers te zamen} \quad \frac{25}{36} \Omega'_x (P - x),$$

voor de klok en voor den hamer  $\frac{5}{36} \Omega'_x (P - x)$ ,

en

voor de klok en hamer  $\frac{1}{36} \Omega'_x (P - x)$ ;

en dus, voor alle waarden van  $x$  te zamen genomen, zal de wiskundige hoop uit dezen hoofde voor de spelers te zamen zijn

$$H_s = \frac{25}{36} \sum_{x=0}^{x=20} \Omega'_x (P - x), \dots \dots \dots (15)$$

voor de klok en voor den hamer

$$H_k = H_k = \frac{5}{36} \sum_{x=0}^{x=20} \Omega'_x (P - x) \dots \dots \dots (16)$$

en voor de klok en hamer

$$H_{kh} = \frac{1}{36} \sum_{x=0}^{x=20} \Omega'_x (P - x) \dots \dots \dots (17)$$

Thans moeten wij nog letten op den invloed van het schimmelen.

Wij beschouwen eerst het geval, dat nog minstens 21 penningen in de kas zijn.

Alsdan zullen van de 6<sup>e</sup> verschillende worpen, die men met de zes dobbelsteen kan verkrijgen, 5<sup>e</sup> schimmel geven. De 6<sup>e</sup> verschillende worpen, die kunnen worden verricht, geven, zooals Dr. ЕКАМА op blz. 110, reg. 14 v. b. vindt, 163296 penningen. Hierop zou 5<sup>e</sup> maal geschimmeld worden, in welk geval telkens 1 aan den schimmel zou moeten worden betaald, dus in het geheel 5<sup>6</sup> = 15625. Op de 163296 penningen, die uit de kas worden verdiend, zoolang nog meer dan 20 penningen in kas zijn, geniet de schimmel, buiten bezwaar van de kas, 15625 penningen, wederom voor  $\frac{25}{36}$  door de spelers, voor  $\frac{5}{36}$  door de klok, voor  $\frac{5}{36}$  door den hamer en voor  $\frac{1}{36}$  door klok en hamer te voldoen.

Hoe lang duurt het nu dat de kas meer dan 20 penningen



bezit? Zij bij zekeren worp het aantal penningen in de kas grooter dan 20 en bij den volgenden dat aantal beneden 21 gedaald. Zij in dat geval het overschietende aantal penningen bij dezen laatsten worp  $y$  en dus  $y < 21$ . Er wordt dan zoolang de kas minstens 21 penningen bevat, medegerekend de worp, die dat aantal beneden 21 doet dalen, door de spelers, de klok, den hamer en de klok en hamer te zamen  $P - y$  penningen verdiend. Op de 163296 penningen, die verdiend worden, ontvangt nu de schimmel 15625, dus op de  $P - y$  penningen

$$\frac{15625}{163296} (P - y). \dots \dots \dots (18)$$

Hiervan betalen nu de spelers,

$$\frac{25}{36} \times \frac{15625}{163296} (P - y), \dots \dots \dots (19)$$

de klok en de hamer ieder

$$\frac{5}{36} \times \frac{15625}{163296} (P - y) \dots \dots \dots (20)$$

en de klok en hamer

$$\frac{1}{36} \times \frac{15625}{163296} (P - y) \dots \dots \dots (21)$$

Dit alles geldt, uitgaande van eene bepaalde waarde van  $y$ . De waarschijnlijkheid, dat die waarde eenmaal zal plaats hebben, zou op zichzelf  $\Omega_y$  zijn. Maar dan is hierbij niet opgenomen de omstandigheid, dat vóór den laatsten worp meer dan 20 penningen in de kas moesten zijn. Zij het aantal penningen, dat vóór dien worp in kas was  $z$ , dan is de waarschijnlijkheid dat eenmaal een worp zal komen, waarbij  $z$  penningen in kas zijn,  $\Omega_z$ , en dat dit gebeurt en onmiddellijk daarna  $z - y$  oogen geworpen worden, heeft nu tot samengestelde waarschijnlijkheid

$$\Omega_z \omega_{z-y}.$$

Zij nu  $\Omega''_y$ , de waarschijnlijkheid, dat na zekeren worp het aantal oogen beneden 21 daalt tot  $y$ , dan zal nu

$$\Omega''_y = \sum_{z=y+1}^{z=y+21} \Omega_z \omega_{z-y} \dots \dots \dots (22)$$

zijn. De wiskundige hoop voor den schimmel is dus wegens

(18) en (22)

$$\frac{15625}{163296} \Omega''_x (P - y) \dots \dots \dots (23)$$

en het wiskundig risico voor de spelers wegens (19) en (22)

$$\frac{25}{36} \frac{15625}{163196} \Omega''_y (P - y) \dots \dots \dots (24)$$

Evenzoo is wegens (20) en (22) het wiskundig risico voor de klok en voor den hamer ieder

$$\frac{5}{36} \frac{15625}{163296} \Omega''_y (P - y), \dots \dots \dots (25)$$

en voor de klok en hamer, lettende op (21) en (22)

$$\frac{1}{36} \frac{15625}{163296} \Omega''_y (P - y) \dots \dots \dots (26)$$

Nu kan echter  $y$  elke waarde hebben van 0 tot en met 20. Wij vinden dus voor al deze waarden te zamen uit (23) de wiskundige hoop voor den schimmel

$$H_x = \frac{15625}{163296} \sum_{y=0}^{y=20} \Omega''_y (P - y), \dots \dots \dots (27)$$

voor het wiskundig risico voor de spelers uit (24)

$$R_s = \frac{25}{36} \frac{15625}{163296} \sum_{y=0}^{y=20} \Omega''_y (P - y), \dots \dots \dots (28)$$

voor het wiskundig risico voor de klok en voor den hamer uit (25)

$$R_k = R_h = \frac{5}{36} \frac{15625}{163296} \sum_{y=0}^{y=20} \Omega''_y (P - y), \dots \dots \dots (29)$$

en voor het wiskundig risico voor de klok en hamer

$$R_{kh} = \frac{1}{36} \frac{15625}{163296} \sum_{y=0}^{y=20} \Omega''_y (P - y) \dots \dots \dots (30)$$

Dit alles nu geldt, zoolang minstens 21 penningen in de kas zijn, met inbegrip van den worp, die dat aantal beneden de 21 doet dalen. Wij moeten nu zien, wat gebeurt als dit laatste geschied is.

Zijn er nu nog  $y$  penningen in de kas, zijnde weder  $y < 21$ , en werpt men wederom, dan kunnen zich drie gevallen voordoen,

òf men werpt meer dan  $y$  oogen,

òf men werpt hoogstens  $y$  oogen,

òf eindelijk men schimmelt.

In het eerste geval wordt niets genoten uit de kas en begint het voordeel van het huis; in het tweede geval worden zooveel penningen uit de kas genomen, als er oogen geworpen zijn; en in het derde geval ontvangt de schimmel zijne penning. Op de 6<sup>e</sup> verschillende worpen, die kunnen worden gedacht thans als eerste worp te volgen, worden niet meer

$$(6^6 - 5^6)(1. \omega_1 + 2. \omega_2 + \dots + 21. \omega_{21}) = 163296,$$

maar slechts

$$(6^6 - 5^6)(1. \omega_1 + 2. \omega_2 + \dots + y. \omega_y) = \phi_y,$$

penningen verdiend, ongerekend het schimmelen, en daar nu 5<sup>e</sup> maal geschimmeld wordt, verdienen de spelers nu  $\phi_y - 5^6$  penningen. Op de  $\phi_y$  penningen, die door de 6<sup>e</sup> worpen gemiddeld aan de kas worden onttrokken, worden door den schimmel nu 5<sup>e</sup> = 15625 penningen verdiend. Tegen het feit, dat bij den eerstvolgenden worp alzoo gemiddeld  $\frac{\phi_y}{6^6}$  penningen aan de kas worden onttrokken, staat voor den

schimmel de wiskundige hoop  $\frac{5^6}{6^6}$  over.

Gaan wij nu na, welke de waarschijnlijkheid is, dat eenmaal een toestand zal intreden, waarbij de kas  $y$  penningen bevat en wel in den tijd, dat nog geschimmeld kan worden.

Zij wederom  $x$  het aantal penningen, waarbij het voordeel van het huis begint, dan is slechts noodig dat  $y > x$ . De waarschijnlijkheid van  $x$  is, gelijk wij vroeger vonden,  $\Omega'_x$ . De waarschijnlijkheid, dat, bij  $y$  penningen in kas, nog kan geschimmeld worden, is alzoo, wat deze waarde van  $x$  betreft, eveneens  $\Omega'_x$ . Verder is de waarschijnlijkheid, dat op zeker oogenblik  $y$  penningen in de kas zullen voorkomen,  $\Omega_y$ .

De waarschijnlijkheid dus, dat eenmaal  $y$  penningen in de kas zullen voorkomen, en dat bij een bepaald getal van

$x$  penningen, dat daar beneden is, het huis begint te trekken, is alzoo

$$\Omega_y \Omega'_x.$$

Voor alle waarden van  $x$  wordt dit

$$\Omega'''_y = \Omega_y \sum_{x=0}^{x=y-1} \Omega'_{y-x} \dots \dots \dots (31)$$

Alzoo is  $\Omega'''_y$  de waarschijnlijkheid, dat men gedurende het tijdperk van schimmelen een oogenblik zal krijgen, waarin  $y$  penningen in de kas zijn. Voor iederen worp, die in dat geval wordt verricht, is het wiskundig risico, gelijk negatieve wiskundige hoop, voor de kas  $\frac{\Phi_y}{6^6}$  en de wiskundige

hoop voor den schimmel  $\frac{5^6}{6^6}$ ; met dien verstande evenwel dat, indien meerdere worpen gedaan worden, alvorens het aantal penningen in de kas daalt, al de worpen, op den laatsten na, voordeel voor den schimmel zullen opleveren.

Het is echter gemakkelijk na te gaan, dat, onverschillig hoeveel worpen er blijken plaats te hebben voor en aleer het aantal penningen in de kas beneden  $y$  daalt, de verhouding  $\frac{\Phi_y}{6^6}$  en  $\frac{5^6}{6^6}$ , welke voor den eersten worp wordt verwacht, blijft gehandhaafd. Wij zullen dit nagaan.

Beschouwen wij eerst eenvoudig drie worpen, dan heeft men het volgende schema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ WORP. } \left\{ \begin{array}{l} A \quad B \\ \frac{5^6}{6^6} \times 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2^{\circ} \text{ WORP. } \left\{ \begin{array}{l} A \quad B \\ \left(\frac{5^6}{6^6}\right)^2 \times 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 3^{\circ} \text{ WORP. } \\ \left(\frac{5^6}{6^6}\right)^3 \times 1 \\ \left(\frac{5^6}{6^6}\right)^2 \left(\frac{6^6 - 5^6}{6^6}\right) \times \frac{D}{6^6 - 5^6} \text{ uit.} \\ \left(\frac{5^6}{6^6}\right) \left(\frac{6^6 - 5^6}{6^6}\right) \times \frac{D}{6^6 - 5^6} \text{ uit.} \\ \frac{C}{6^6 - 5^6} \times \frac{D}{6^6 - 5^6} \text{ uit.} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

waar  $A$  beteekent:

Waarschijnlijkheid, dat het tot dezen worp komt en dat daarbij schimmel geworpen wordt.

waar  $B$  beteekent:

Waarde der uitkeering in dat geval.

waar  $C$  beteekent:

Waarschijnlijkheid, dat het tot dezen worp komt en dat daarbij geen schimmel geworpen wordt.

waar  $D$  beteekent:

Waarde der uitkeering in dit geval.

Met uit bedoelen wij, dat, na het plaats hebben van den bijbehorenden worp, het aantal penningen beneden  $y$  daalt, en alzoo het spel, dat gedurende het voorhanden zijn van juist  $y$  penningen in de kas gespeeld wordt, als geëindigd moet worden beschouwd.

Nu zien wij, dat wij in drie worpen voor den schimmel de wiskundige hoop

$$\left\{ \frac{5^6}{6^6} + \left( \frac{5^6}{6^6} \right)^2 + \left( \frac{5^6}{6^6} \right)^3 \right\} \times 1 = \left\{ 1 + \left( \frac{5^6}{6^6} \right) + \left( \frac{5^6}{6^6} \right)^2 \right\} \times \frac{5^6}{6^6} \times 1$$

vinden en voor de kas het wiskundig risico

$$\begin{aligned} \frac{6^6 - 5^6}{6^6} \times \frac{\Phi_y}{6^6 - 5^6} + \left( \frac{5^6}{6^6} \right) \left( \frac{6^6 - 5^6}{6^6} \right) \times \frac{\Phi_y}{6^6 - 5^6} + \left( \frac{5^6}{6^6} \right)^2 \left( \frac{6^6 - 5^6}{6^6} \right) \times \frac{\Phi_y}{6^6 - 5^6} = \\ = \left\{ 1 + \left( \frac{5^6}{6^6} \right) + \left( \frac{5^6}{6^6} \right)^2 \right\} \times \left( \frac{6^6 - 5^6}{6^6} \right) \times \frac{\Phi_y}{6^6 - 5^6}. \end{aligned}$$

Men ziet hieruit, dat de verhouding  $\frac{5^6}{6^6}$  en  $\frac{\Phi_y}{6^6 - 5^6}$  zich ook in drie worpen handhaaft, en het is duidelijk, dat dit bij meerdere worpen zoo blijft. In dat geval krijgt de reeks tusschen de accoladen eenvoudig meer termen. Die reeks valt echter bij de verhouding weg.

De waarschijnlijkheid, dat  $y$  penningen in kas tijdens de periode van het schimmelen zal voorkomen, is, zooals wij vonden,  $\Omega'''_y$ . Heeft dit plaats, dan geeft dit voor den schimmel een wiskundige hoop van  $\frac{5^6}{6^6}$  tegen een wiskundig risico

voor de kas van  $\frac{\Phi_y}{6^6}$ . Men vindt dus, dat uit dezen hoofde,

bij het begin van het spel eene wiskundige hoop voor den schimmel  $\Omega'''$ ,  $\frac{5^s}{6^s}$  staat tegenover een wiskundig risico voor

de kas groot  $\Omega'''$ ,  $\frac{\Phi_y}{6^s}$ . Hiermede beweren wij nu niet, dat deze getallen de wiskundige hoop en het wiskundig risico zelve aangeven; maar alleen dat deze getallen dit in verhouding doen. Om die waarden zelve te vinden, zou men er den vorm tusschen accoladen nog aan moeten toevoegen. Het aantal termen van dien vorm hangt af van het aantal worpen, waarin men onderstelt, dat gemiddeld de verlaging van het aantal penningen in de kas verkregen wordt. Dat aantal is echter volstrekt onafhankelijk van  $y$ , daar onder de hoofden »Waarschijnlijkheid dat het tot dezen worp komt en dat daarbij schimmel geworpen wordt», geen grootheden voorkomen, die van  $y$  afhangen. Eigenlijk zou men het aantal worpen voor iedere waarde van  $y$  oneindig groot moeten nemen, om zeker te zijn, dat binnen dat aantal worpen, de worp voorkomt, die het aantal penningen in de kas doet dalen; en zelfs dit heeft dan echter nog slechts plaats met eene waarschijnlijkheid, die aan de zekerheid grenst, zonder deze nog zelve te zijn, maar die praktisch daaraan kan worden gelijk gesteld.

Wat nu de duur van het spel betreft, zij opgemerkt, dat op deze wijze alzoo geen  $\infty$  wordt ingevoerd en het aantal worpen steeds eindig blijft, ofschoon aan  $\infty$  grenzende. In deze onderstelling zal dus ook de worp, die de vermindering te weeg brengt, eindelijk volgen. Ook merke men op, dat dit zelfs spoedig, ja bij den eersten worp gebeuren, kan, zooals ons schema van drie worpen aanwijst.

Door het bovenstaande in acht te nemen wordt onze factor tusschen de accoladen overal

$$1 + \frac{5^s}{6^s} + \left(\frac{5^s}{6^s}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{5^s}{6^s}} = \frac{6^s}{6^s - 5^s},$$

en alzoo de wiskundige hoop voor den schimmel

$$\frac{6^s}{6^s - 5^s} \Omega''' \frac{5^s}{6^s} = \frac{5^s}{6^s - 5^s} \Omega''' \dots \dots (32)$$

en het wiskundig risico voor de kas

$$\frac{6^6}{6^6 - 5^6} \Omega''_y \frac{\Phi_y}{6^6} = \frac{\Phi_y}{6^6 - 5^6} \Omega'''_y \dots \dots \dots (33)$$

De wiskundige hoop en het wiskundig risico zijn nu gevonden voor eene bepaalde waarde van  $y$ . Voor alle waarden van  $y$  vinden wij nu voor de wiskundige hoop van den schimmel

$$H'_s = \frac{5^6}{6^6 - 5^6} \sum_{y=1}^{y=20} \Omega'''_y \dots \dots \dots (34)$$

Ten gevolge van de gelijktijdig plaats hebbende worpen met de twee dobbelsteen met figuren moet het voordeel voor den schimmel nu weer door de spelers, de klok, den hamer en de klok en hamer gedragen worden in de verhouding 25, 5, 5, 1; zoodat hier uit voor de spelers het wiskundig risico

$$R'_s = \frac{25}{36} \frac{5^6}{6^6 - 5^6} \sum_{y=1}^{y=20} \Omega'''_y \dots \dots \dots (35)$$

voor de klok en voor den hamer het wiskundig risico

$$R'_k = R'_h = \frac{5}{36} \frac{5^6}{6^6 - 5^6} \sum_{y=1}^{y=20} \Omega'''_y \dots \dots \dots (36)$$

en voor de klok en hamer

$$R'_{kh} = \frac{1}{36} \frac{5^6}{6^6 - 5^6} \sum_{y=1}^{y=20} \Omega'''_y \dots \dots \dots (37)$$

voortspruit.

Wij kunnen nu nagaan hoe groot, als de kas, nadat al de stortingen zijn verricht — dat is, nadat de spelers hun penningen hebben ingelegd en nadat de koopsommen voor schimmel, huis, klok, hamer en klok en hamer zijn betaald —  $P$  bedraagt, de ingelegde penningen van iederen speler alsmede de genoemde koopsommen moeten zijn. De eenige voorwaarde toch is, dat de bedoelde bedragen overeenkomen met de wiskundige hoop, die daarvoor door de spelers en de bezitters der verschillende kaarten worden gekocht.

Wij merken hierbij op, dat de spelers, volgens den regel van het spel, ieder evenveel penningen moeten inleggen; terwijl wellicht, of bijna zeker, een opzettelijk onderzoek zou leeren, dat de wiskundige hoop niet voor al de spelers dezelfde is, maar afhangt van het hebben der voorhand. Bepaalt men echter dat de orde, waarin de spelers hun spel beginnen, eerst na de storting der inlegpenningen bij loting zal worden uitgemaakt, dan is dit bezwaar opgeheven, daar dan alle spelers dezelfde wiskundige hoop hebben, en deze uit de volkomen nauwkeurige wiskundige hoop, die zij te zamen hebben, kan worden afgeleid.

De wiskundige hoop voor de spelers te zamen is nu volgens (5), (15), (28) en (35)

$$\mathbf{H}_s = H_s + H'_s - R_s - R'_s \dots \dots \dots (38)$$

Zijn er dus  $n$  spelers, dan moet elk hunner in het begin inleggen

$$I = \frac{1}{n} \mathbf{H}_s \dots \dots \dots (39)$$

De wiskundige hoop en dus ook de juiste koopsom voor den schimmel is nu volgens (27) en (34)

$$\mathbf{H}_{sc} = H_{sc} + H'_{sc} \dots \dots \dots (40)$$

De wiskundige hoop en dus ook de juiste koopsom van de klok en van den hamer zijn volgens (16), (29) en (36)

$$\mathbf{H}_k = H_k - R_k - R'_k \dots \dots \dots (41)$$

en

$$\mathbf{H}_k = H_k - R_k - R'_k \dots \dots \dots (42)$$

De wiskundige hoop en dus ook de juiste koopsom is eveneens voor de klok en hamer volgens (17), (30) en (37)

$$\mathbf{H}_{kh} = H_{kh} - R_{kh} - R'_{kh} \dots \dots \dots (43)$$

De wiskundige hoop en dus ook de juiste koopsom voor het huis is eindelijk volgens (14)

$$\mathbf{H}_{hu} = H_{hu} \dots \dots \dots (44)$$

Worden deze kaarten voor andere sommen verkocht, dan genieten de koopers winst of zij lijden verlies, naarmate zij minder of meer betalen dan de in (40), (41), (42), (43) en (44) gevonden waarden. Het verschil in minder of meer is



dan evenwel niet gelijk aan de genoten winst of het geleden verlies, aangezien bij eene veranderde koopsom van eene of meerdere kaarten, alle verhoudingen in het spel veranderen.

Uit (16), (29) en (36) volgt nog, dat (41) en (42) geven

$$H_k = H_k.$$

Uit eene vergelijking van (16) met (17), (29) met (30) en (36) met (37), waarbij telkens blijkt, dat de tweede eene vijfmaal kleinere waarde dan de eerste geeft, volgt dat (42) en (43) geven

$$H_{kk} = \frac{1}{5} H_k,$$

en dus, in verband met hetgeen wij zoo even vonden,

$$H_k = H_k = 5 H_{kk} \dots \dots \dots (45)$$

Dit komt overeen met hetgeen Dr. EKAMA vindt op blz. 111 (ongeveer midden).

Wat den schimmel betreft, merken wij nog op, dat in (40)  $H'_s$  betrekkelijk eene hoogere waarde zal vertegenwoordigen dan Dr. EKAMA gevonden heeft; wijl deze niet in aanmerking heeft genomen, dat zoodra minder dan 21 penningen in de kas zijn, de verhouding van de wiskundige hoop van den schimmel en het wiskundig risico van de kas, ten gunste van den eersten verandert. Misschien verklaart dit waarom men bij intuïtie gewoon is meer voor den schimmel te betalen dan Dr. EKAMA vindt; zoodat de oorzaak van dit verschijnsel niet behoeft gezocht te worden in de minder nauwkeurige afwerking der steenen, eene oorzaak, die, zooals wij reeds gevonden hebben, niet afdoende kan zijn.

Eindelijk hebben wij nog

$$P = H_s + H_{ss} + H_k + H_k + H_{kk} + H_{kk}, \dots (46)$$

in welke formule de termen van het tweede lid alle functiën van  $P$  zijn. Uitgaande van eene bepaalde waarde van  $P$  hebben wij al deze  $H$ 's gevonden, alsmede de  $I$ . Wij kunnen nu (46) gebruiken om de juistheid der gevonden uitkomsten te toetsen. Men kan nu ook eene tafel maken met dubbelen ingang, gevende de eene ingang verschillende waarden voor  $P$  en de andere verschillende waarden voor het aantal spelers  $n$ , of nog eenvoudiger, daar  $I$  toch on-

middellijk uit  $H$ , volgt, maakt men eene tafel, waarin voor iedere waarde van  $P$  de waarden van  $H$ ,  $H_{sc}$ ,  $H_k$ ,  $H_h$ ,  $H_{kh}$  en  $H_{hs}$  berekend zijn. Men kan uit zulk eene tafel dan nu ook omgekeerd vinden, hoe groot de kas en de koopsommen en hoeveel het bedrag der inlegpenningen moeten zijn, indien een dezer grootheden, onverschillig welke, gegeven is.

---

# KLEINERE MEDEDEELINGEN.

---

DE OUDSTE REKENTAFELS DER WERELD,

DOOR

**F. J. VAN DEN BERG.**

---

Onder bovenstaand opschrift komt in de Zondags-bijvoegsels N<sup>o</sup>s 38 en 39 van de Vossische Zeitung van 20 en 27 September 1891 een belangrijk artikel van den hoogleeraar HEINRICH BRUGSCH voor, waarvan het Algemeen Handelsblad van 11 October 1891 onder den titel »Hoe de ouden rekenen" een zakelijk uittreksel gaf, dat, nog eenigszins verkort, hier thans onder de aandacht der lezers van het Nieuw Archief gebracht wordt.

Vóór het invoeren der zoogenaamde Arabische cijfers bediende men zich veelal van de letters van het alphabet, om getallen aan te duiden. Zoo deden de Grieken, de Romeinen en ook de Hebreërs.

De Egyptenaren volgden een andere schrijfwijze. Zij gebruikten voor de getallen 1 tot 9 naast elkander geplaatste opstaande streepjes. Voor 10 hadden zij een teeken in den vorm van een hoefijzer, dat zooveel malen herhaald werd als er tientallen waren; evenzoo voor 100, 1000 enz. Later schreven zij voor 4 in plaats van |||| een liggend streepje

—, en voor 8 dus =. Breuken werden niet door bijzondere teekens voorgesteld, maar zij plaatsten het woord *ro* vóór het cijfer, dat aanduidde in hoevele deelen het geheel was gesplitst. Aldus beteekende *ro* — hetzelfde als  $\frac{1}{4}$ . Alle breuken hadden 1 tot teller, en als een grooter teller noodig was, drukten zij dat uit door een verbinding van breuken, bij voorbeeld  $\frac{3}{4}$  werd voorgesteld door de teekens van  $\frac{1}{4}$  en  $\frac{1}{4}$ . Aldus werden bij benadering de verschillende breuken uitgedrukt; de rest werd dan verwaarloosd. Merkwaardig is het daarbij, dat dit oude volk op die omslachtige wijze zeer moeilijke berekeningen wist uit te voeren, waarvan tal van bewijzen in oude handschriften zijn gevonden.

De bezetting van Egypte door de Engelschen heeft ook het verrassend feit aan het licht gebracht, dat de tegenwoordige Egyptische landmeters (*massahin*) nog hetzelfde, trouwens gebrekkige, stelsel volgen, dat 2000 en 3000 jaren geleden hun voorvaders (toen *harpedonaptēn* geheeten) toepasten. Zij gebruiken daartoe een maatstok van een *kassabeh* lengte (ruim  $3\frac{1}{4}$  meter) en berekenen de oppervlakte aldus. Bij vierhoekige landerijen tellen zij de lengten der tegenover elkander gelegen zijden bijeen, deelen de som door 2 en vermenigvuldigen de quotienten met elkander. Bij driehoekige grondstukken vermenigvuldigen zij de helft der kortste zijde met de helft van de som der beide langste. Dit een en ander leidt tot onjuiste uitkomsten, en de Engelschen hebben nu een betere methode ingevoerd.

Een der merkwaardigste overblijfselen van de rekenkunde der oude Egyptenaren is te vinden in een papyrusrol, die ongeveer 4000 jaar oud is en in het Britsche museum bewaard wordt. Daarin leest men onder anderen:

»Berekening van een cirkelvormig veld van 9 roeden (in middellijn). Men vraagt naar de oppervlakte. Trek er het negende deel af, dus 1. Als rest blijft 8. Vermenigvuldig 8 maal 8. De uitkomst is 64 vierkante roeden. Dat is de oppervlakte.»

Het is zeker merkwaardig, dat die uitkomst, verkregen door het getal  $\pi$  te vervangen door  $4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3.16$ , zoo weinig van de werkelijke grootte afwijkt.

Een andere belangrijke vondst levert die oude papyrus bij de breuken. Niet alleen worden deze uitgedrukt, zooals reeds is gezegd, door een verbinding van breuken, die 1 tot teller hebben, maar men vindt tusschen de noemers veelal een bepaalde verhouding. Zoo wordt  $\frac{1}{2}$  aldus uitgedrukt:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  en vier keeren  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ , welke breuken te zamen  $\frac{1}{2}$  waard zijn. Die berekening steunt daarop, dat men alle maten voor vloeistoffen, koren enz., in 320 deelen splitste, en dan gebruikte men de getallen 160, 80, 40, 20, 10, 5, 4, 3, 2, 1 om de onderdeelen aan te duiden. Andere breuken werden dan uitgedrukt door een verbinding dier onderdeelen.

Prof. BRUGSCH heeft in April 1891 door een toeval kennis gemaakt met een paar oude schrifturen, die hij de oudste rekentafels der wereld noemt. In het museum van Gizeh (bij Kaïro) viel zijn oog op twee langwerpige houten borden, in den vorm van een lei, met gaatjes van boven, alsof er een touwtje doorgehaald moest worden om ze te dragen of op te hangen. Zij bleken beschreven te zijn met tal van cijfers, en uit den antieken vorm der teekens en bijgevoegde namen kan men opmaken, dat zij afkomstig zijn uit den tijd der 11<sup>de</sup> en 12<sup>de</sup> dynastie, dat is ongeveer 25 eeuwen vóór onze jaartelling. Zij waren in een graf gevonden, vermoedelijk dat van een scholier, wien men zijn laatste rekenwerk had medegegeven.

De ontcijfering van hetgeen op beide zijden dezer bordjes geschreven stond, leerde dat zij bewerkingen bevatten, om dezelfde verhouding in verschillende cijfers uit te drukken. Als voorbeeld diene het volgende:

$$\begin{aligned}
 1 &: \frac{1}{3}, \\
 2 &: \frac{2}{3}, \\
 4 &: 1\frac{1}{3}, \\
 5 &: 1\frac{2}{3}, \\
 10 &: 3\frac{1}{3}, \\
 20 &: 5 + 1\frac{1}{3}, \\
 40 &: 10 + 3\frac{1}{3}, \\
 80 &: 20 + 5 + 1\frac{1}{3}, \\
 160 &: 40 + 10 + 2 + 1\frac{1}{3}, \\
 320 &: 80 + 20 + 5 + 1\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Aldus wist men, wel wat omslachtig maar toch volkomen juist, bewerkingen met breuken uit te voeren, altijd met behulp van het grondtal 320. Wanneer echter de factoren van dat getal niet voldoende waren, behielp men zich door benadering. Dit blijkt uit het volgend voorbeeld, ook aan de genoemde oude borden ontleend:

$$7 : 1,$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{16},$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{16},$$

$$1 : \frac{40 + 5\frac{1}{2}}{320},$$

$$2 : \frac{80 + 10 + 1}{320},$$

$$4 : \frac{160 + 20 + 2}{320}.$$

Deze drie laatste verhoudingen zijn niet volkomen als 7 : 1. Daarvoor zou de eerste moeten wezen  $1 : \frac{21}{32}$  en niet  $1 : \frac{21}{32}$ , enz. Men nam echter de naaste factoren van 320 en verwaarloosde de rest, zooals ook wij thans doen bij deelingen die niet opgaan.

Men ziet uit deze voorbeelden weder, welke rol dat getal 320 speelde bij de rekenkunde der oude Egyptenaren. Ook bij de inhoudsmaten, zooals reeds is gezegd. Als kleinste maat diende daarvoor, blijkens een groot aantal opschriften en gevonden voorwerpen, de *hin*, welke maat dezelfde dienst deed als bij ons de *liter*. Ook de Hebreërs kenden die maat, welke volgens nauwkeurige berekeningen met 0.454 liter overeenkomt.

Nu bevindt zich in het museum te Gizeh een metalen beker, waarvan de wand, zoo binnen als buiten, van boven naar beneden, een aantal kringen bevat. De cijfers en letters daartusschen toonen, dat die kringen een verdeling voorstellen in deze volgorde:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$  en  $\frac{1}{64}$  *hin*. De inhoud van den beker is gebleken 0.23 liter te zijn, dus de helft van een *hin*, juist dus zooals de hoogste kring aanwijst. Men heeft hier dus weder de indeeling volgens de factoren van 320.

Wanneer men nu de *hin* als eenheid aanneemt en het

320-voud er van neemt, komt men tot een maat van ruim 145 liter inhoud. Het is zeker hoogst verrassend, dat een kubus van de oud-Egyptische el (die ongeveer = 0,527 meter was) met die inhoudsmaat geheel overeenkomt. Daaruit blijkt het merkwaardig feit dat, evenals in ons metriek stelsel lengte- en inhoudsmaten op dezelfde grondslag berusten, dit reeds duizenden jaren geleden evenzoo geschiedde bij de Egyptenaren. En de opschriften toonen aan, dat ook bij de vlaktematen de indeeling volgens het cijfer 320 gebruikelijk was.

Opmerking verdient nog, dat de oude Babyloniërs een ander stelsel hadden, waarvan 60 de grondslag was. Zij rekenden volgens de getallenreeks 360, 60, 1,  $\frac{1}{60}$ ,  $\frac{1}{360}$ , een methode, die thans nog voortleeft in de graadmeting van cirkels en hoeken.

---

Als tegenhanger van hetgeen hier over de alleroudste rekenwijze werd aangevoerd, moge dienen, dat misschien het nieuwste op dit gebied onlangs geleverd werd door ons honorair lid MAURICE D'OCAGNE in zijn »Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application. (96 pages, VIII Pl.), Paris 1891" waarvan waarschijnlijk binnenkort eene aankondiging zal voorkomen in het Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs.

---

# DE CONSTRUCTIE VAN EENIGE STELSELS VAN HOEKTRANSVERSALEN IN DEN VLAKKEN DRIEHOEK,

DOOR

P. I. HELWIG J.Az.

---

§ 1. In mijn vorig opstel (Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel XVII, Stuk 2, pag. 217), heb ik mij bepaald tot het vermelden van de constructie van alle hoektransversalen van positieve en negatieve geheele orden; thans zal ik overgaan tot de beschouwing van constructien van hoektransversalen, die andere eigenschappen hebben dan de behandelde. De behandelde hoektransversalen toch hebben allen de eigenschap, dat ze de overstaande zijde verdeelen in stukken, die zich verhouden als de  $n^{\text{de}}$  machten der sinussen van de hoeken over de aangrenzende zijden en deze opmerking voert spoedig tot de vraag naar de constructie van alle hoektransversalen, die de overstaande zijde deelen in stukken, die zich verhouden als de  $m^{\text{de}}$  machten van zekere goniometrische functie van eenig veelvoud of van een evenmatig deel der hoeken over de aangrenzende zijden. De beantwoording dezer vraag in haar geheel is, wat betreft de veelvouden een onbegrensd, wat de deelen aangaat een, gedeeltelijk met passer en liniaal onuitvoerbaar, werk; en ik zal mij daarom bepalen tot de cosinus- en tangensfunctie der geheele hoeken (voor de sinusfunctie der geheele hoeken zie men genoemd opstel) en de



sinus-, cosinus- en tangensfunctie der dubbele en halve hoeken van den driehoek.

§ 2. Bepalingen. Hoektransversalen, die de overstaande zijde verdeelen in stukken, die zich verhouden als de  $m^{\text{de}}$  machten eener goniometrische functie der hoeken over de aangrenzende zijden, zijn *goniometrische* hoektransversalen van de  $m^{\text{de}}$  orde.

Is de naam der functie bekend, dan kan men bij voorbeeld spreken van tangenstransversalen of van cosinustransversalen van halve hoeken van zekere orde. Ter bekorting van lange uitdrukkingen zouden namen als *tangentiaan*, *bisinusiaan*, *semicosinusiaan* enz. waarbij 't voorvoegsel den factor aauwijst, waarmede de hoek moet vermenigvuldigd worden, dienst kunnen doen.

§ 3. Stellen we één bepaalde goniometrische functie voor door de letter  $F$  vóór de hoekletter te plaatsen, dan kunnen we eenige uitkomsten uit genoemd opstel, die we in 't volgende zullen aanwenden, aldus weergeven.

a. Zijn  $\alpha$  en  $\beta$  de loodlijnen uit een punt van een goniometrische hoektransversaal van de  $m^{\text{de}}$  orde uit C op de zijden  $a$  en  $b$  van  $\triangle ABC$  achtereenvolgens neergelaten, dan is

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{F^m(A) \cdot \sin B}{F^m(B) \cdot \sin A}.$$

Immers

$$\frac{\alpha a}{\beta b} = \frac{\alpha \sin A}{\beta \sin B} = \frac{F^m(A)}{F^m(B)},$$

volgens de bepaling.

b. Goniometrische hoektransversalen van de  $m^{\text{de}}$  orde zijn *isotoom* toegevoegd aan goniometrische hoektransversalen der omgekeerde waarde der functie van de  $m^{\text{de}}$  orde.

c. Goniometrische hoektransversalen van de  $m^{\text{de}}$  orde zijn *isogonaal* toegevoegd aan goniometrische hoektransversalen, wier functie bestaat uit de omgekeerde waarde der functie vermenigvuldigd met het vierkant van den sinus van den hoek.

Als dus gevraagd wordt de isogonaal toegevoegde hoektransversaal van de tangentiaan van de  $1^{\text{ste}}$  orde (de hoogte-

lijn namelijk), dan is de verhouding, waarin de gevraagde de overstaande zijde ( $c$ ) deelt, gelijk aan

$$\frac{\cot A \cdot \sin^2 A}{\cot B \cdot \sin^2 B} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B},$$

en verkrijgt men de bisinusiaan van de 1<sup>ste</sup> orde of de hoektransversaal door het middelpunt van den omgeschreven cirkel.

De overige eigenschappen der sinusianen op de goniometrische hoektransversalen over te brengen zij den lezer overgelaten.

§ 4. In dit opstel is het ons nu te doen om een inzicht te krijgen in de constructie van alle in- en uitwendige goniometrische hoektransversalen van positieve en negatieve geheele orden. Geven bovengenoemde eigenschappen eenige hoop, een volledig materiaal bezitten we daarin nog niet; maar om dit te verkrijgen zullen we gebruik maken van hulpdriehoeken, die op bepaalde wijze afhangen van de elementen van den driehoek, waarin de constructie verlangd wordt.

De hulpdriehoeken, welke hier den grootsten dienst bewijzen, worden verkregen door het snijpunt van elke bisinusiaan der 1<sup>ste</sup> orde met den omgeschreven cirkel, te vereenigen met de beide overige hoekpunten van den driehoek. Is  $R$  't snijpunt der bisinusiaan van  $C$ , dan is in den hulpdriehoek  $ABR < BAR = 90^\circ - A$  en  $ABR < ABR = 90^\circ - B$ , en om deze reden stel ik voor deze hulpdriehoeken *complementaire driehoeken* van  $ABC$  te noemen. Gaan we nu over tot

#### *I. Constructie der cosinusianen van geheele positieve en negatieve orden.*

Uit het bovenstaande volgt, dat elke zijde van  $\triangle ABC$  door de sinusiaan der  $m^{\text{de}}$  orde, uit het overstaande hoekpunt van den op haar beschreven complementairen driehoek, gesneden wordt in het voetpunt der cosinusiaan van de  $m^{\text{de}}$  orde in den  $\triangle ABC$ . Construeert men dus volgens § 12 van genoemd opstel de sinusianen naar  $a$ ,  $b$  en  $c$  in de complementaire driehoeken, dan zullen deze op elke zijde van  $\triangle ABC$  de punten bepalen, die verbonden met 't overstaande hoekpunt

van  $\triangle ABC$  de cosinusianen opleveren in  $\triangle ABC$ . Hiermede is de constructie der cosinusianen voldoende toegelicht.

## II. Constructie der tangentianen van geheele positieve en negatieve orden.

De constructie dezer hoektransversalen kan blijkbaar niet teruggebracht worden tot reeds bekende constructies, omdat de cotangens zoowel de complementaire functie, als de omgekeerde waarde van den tangens is. Met behulp echter van den complementairen driehoek en de stellingen § 3, b en c, is ze mogelijk.

Stellen we weer door  $\overset{g}{|}$  en  $\overset{c}{|}$  symbolisch den overgang voor respectievelijk tot de *isogonaal*- en *isotoom*-toegevoegde hoektransversaal, en nu daarenboven nog door  $\overset{c}{|}$  den overgang tot een hoektransversaal met complementaire functie; welke laatste overgang, volgens 't bovenstaande, door een complementairen driehoek kan plaats hebben. Geven we nu de functie aan door haar naam, de orde door den exponent, en 't feit, dat de hoektransversaal in een complementairen driehoek van  $ABC$  getrokken is, door een index bij de functie, dan is

$\alpha$ . aanvangende bij de tangentiaan 1<sup>ste</sup> orde (hoogtelijn)

$$\begin{aligned} \tan^1 \overset{c}{|} \cot_1^1 \overset{g}{|} \tan_1^1 \sin_1^1 &= \sin_1^1 \sec_1^1 \overset{c}{|} \cos^1 \csc^1 \overset{g}{|} \sec^1 \sin^1 = \\ &= \tan^3 \overset{c}{|} \cot_1^3 \overset{g}{|} \tan_1^3 \sin_1^3 = \sin_1^5 \sec_1^5 \overset{c}{|} \cos^5 \csc^5 \overset{g}{|} \sec^5 \sin^5 = \tan^5 \text{ enz.} \end{aligned}$$

$\beta$ . aanvangende bij de tangentiaan 0<sup>de</sup> orde (mediaan)

$$\begin{aligned} \tan^0 \overset{c}{|} \cot_1^0 \overset{g}{|} \tan_1^0 \sin_1^1 &= \sin_1^1 \overset{c}{|} \cos^1 \overset{g}{|} \sec^1 \sin^1 = \\ &= \tan^2 \overset{c}{|} \cot_1^2 \overset{g}{|} \tan_1^2 \sin_1^2 = \sin_1^4 \sec_1^4 \overset{c}{|} \cos^4 \csc^4 \overset{g}{|} \sec^4 \sin^4 = \tan^4 \text{ enz.} \end{aligned}$$

Men zou kortweg de methode om van een tangentiaan van de  $m^{\text{de}}$  orde te komen tot eene van de  $(m+2)^{\text{de}}$  orde kunnen voorstellen door eene constructieformule  $\overset{m}{[c} \overset{m+2}{g} \overset{m+2}{c} \overset{m+2}{g}]$ ; de constructieformule voor de cosinusianen zou dan zijn  $\overset{m}{[t} \overset{m+2}{c} \overset{m+2}{g} \overset{m+2}{c}]$  en die bij de sinusianen  $\overset{m}{[t} \overset{m+2}{g}]$ . Het is duidelijk dat, om eene constructieformule werkelijk eene voortgaande constructie te doen voorstellen, daarin

1°. geen gelijknamige overgangen in de reeks naast elkaar mogen staan, omdat deze elkaar dan opheffen;

2°. steeds een even getal  $c$ -overgangen aanwezig moet zijn, omdat men anders niet weder terugkeert tot de driehoeken, waarin de constructie verlangd wordt;

3°. steeds minstens één  $g$ -overgang aanwezig moet zijn, omdat men anders weder tot dezelfde hoektransversaal terugkeert.

Wanneer men met deze voorwaarden niet in strijd is, mag men in een constructiereeks, wanneer  $t$ -overgangen en  $c$ -overgangen naast elkaar staan, deze van plaats verwisselen.

Immers  $F^n \mid \overset{t}{F^{-n}} \mid \overset{c}{co-F_1^{-n}}$  voert tot de zelfde uitkomst als  $F^n \mid \overset{c}{co-F_1^n} \mid \overset{t}{co-F_1^{-n}}$ .

### III. Constructie der bisinusianen van geheele positieve en negatieve orden.

Uit bovenstaande opmerkingen blijkt, dat ook de constructieformule  $\overset{m}{[ctgctg]}^{\overset{m+2}{}}$  mogelijk is, en deze zal de constructieformule blijken te zijn van de bisinusianen.

$\alpha$ . aanvangende bij de bisinusiaan 1<sup>ste</sup> orde (hoektransversaal door 't middelpunt van den omgeschreven cirkel) heeft men:

$$\sin \cos \mid \overset{c}{\cos_1} \overset{t}{\sin_1} \mid \overset{t}{\sec_1} \overset{c}{\csc_1} \mid \overset{g}{\cos_1} \overset{t}{\sin_1} \mid \overset{t}{\sin \cos^3} \mid \overset{c}{\csc \sec^3} \mid \overset{g}{\sin^3 \cos^3} \text{ enz.}$$

$\beta$ . aanvangende bij de bisinusiaan 0<sup>de</sup> orde (mediaan) heeft men

$$\sin^0 \cos^0 \mid \overset{c}{\cos_1^0} \overset{t}{\sin_1^0} \mid \overset{t}{\sec_1^0} \overset{c}{\csc_1^0} \mid \overset{g}{\cos_1^0} \overset{t}{\sin_1^0} \mid \overset{t}{\sin^0 \cos^2} \mid \overset{c}{\csc^0 \sec^2} \mid \overset{g}{\sin^2 \cos^2} \text{ enz.}$$

Deze constructie is vrij omslachtig; we zullen in 't volgende een methode leeren kennen, die sneller tot 't doel voert.

### IV. Constructie der bisinusianen, bicosinusianen en bitangentianen van geheele positieve en negatieve orden.

We zullen nu gebruik maken van eene tweede soort van hulpdriehoeken, welke verkregen worden door op elke zijde van  $\triangle ABC$  driehoeken te construeeren, wier hoeken aan de hoekpunten van  $\triangle ABC$  tweemaal zoo groot zijn als de aan 't zelfde hoekpunt gelegen hoek van  $\triangle ABC$ , of ook gelijk zijn aan de supplementen der dubbele hoeken van  $\triangle ABC$ . Ter bekorting zullen we deze hulpdriehoeken de *digonale* driehoeken noemen van  $\triangle ABC$ .

Het is nu duidelijk, dat elke zijde van  $\triangle ABC$  door de sinusiaan der  $m^{\text{de}}$  orde uit het overstaande hoekpunt van den op haar beschreven digonalen  $\triangle$ , gesneden wordt in het voetpunt der bisinusiaan van de  $m^{\text{de}}$  orde in den  $\triangle ABC$ . Op soortgelijke wijze leveren de cosinusianen en tangentianen van de  $m^{\text{de}}$  orde in de digonale driehoeken de voetpunten op de zijden van  $\triangle ABC$  der bicosinusianen en bitangentianen in  $\triangle ABC$ .

Construeert men derhalve in de digonale driehoeken op reeds vermelde wijze naar  $a$ ,  $b$  en  $c$  de sinusianen, cosinusianen en tangentianen dan zullen deze op elke zijde van  $\triangle ABC$  de punten bepalen, die verbonden met 't overstaande hoekpunt achtereenvolgens de bisinusianen, bicosinusianen en bitangentianen in  $\triangle ABC$  opleveren.

V. *Constructie der semisinusianen, semicosinusianen en semitangentianen van geheele positieve en negatieve orden.*

Geheel overeenkomstig met 't voorgaande kunnen we hier gebruik maken van hulpdriehoeken, die verkregen worden door op elke zijde van  $\triangle ABC$  driehoeken te construeeren, wier hoeken aan de hoekpunten van  $\triangle ABC$  half zoo groot zijn als de aan 't zelfde hoekpunt gelegen hoek van  $\triangle ABC$ . Ter bekorting zouden deze hulpdriehoeken de *hemigonale* driehoeken van  $\triangle ABC$  kunnen genoemd worden. Het is nu duidelijk, dat elke zijde van  $\triangle ABC$  door de sinusiaan van de  $m^{\text{de}}$  orde, uit 't overstaande hoekpunt van den op haar beschreven hemigonalen driehoek, gesneden wordt in het voetpunt der semisinusiaan van de  $m^{\text{de}}$  orde in den  $\triangle ABC$ . Dit geldt natuurlijk ook voor de semicosinusianen en semitangentianen in  $\triangle ABC$ , en de constructie verloopt verder geheel overeenkomstig met IV.

Opgemerkt zij, dat het punt van GERGONNE ( $\Gamma$ ) of 't snijpunt der rechten, die de hoekpunten van den driehoek verbinden met de raakpunten van den ingeschreven cirkel op de overstaande zijden, het concurrentiepunt is der inwendige semitangentianen van de  $1^{\text{ste}}$  orde, en dat het punt van NAGEL ( $\nu$ ) of 't snijpunt der rechten, die de hoekpunten van den driehoek verbinden met de raakpunten op de overstaande

zijden van den overeenkomstigen aangeschreven cirkel, het concurrentiepunt is der inwendige semitangentianen van de  $(-1)^{\text{ste}}$  orde.

§ 5. Het gebruik der hulpdriehoeken heeft nu tevens den weg aangewezen ter constructie van de goniometrische hoektransversalen, wier functie andere veelvouden van den hoek bevat dan de behandelde, en tevens aangetoond in hoeverre passer en liniaal daartoe geheel toereikend zijn; immers waar het geldt derde, vijfde enz. deelen van een hoek te construeeren, laten deze werktuigen ons in den steek.

§ 6. Construeert men aldus in  $\triangle ABC$  de behandelde hoektransversalen uit alle hoekpunten, dan blijkt, dat de concurrentiepunten van hoektransversalen van dezelfde orde, die tot 't zelfde stelsel behooren, allen op eene kromme lijn gelegen zijn. De kromme door de concurrentiepunten, die de sinusianen van de zelfde orde geven, heeft Prof. M. G. DE LONGCHAMPS *potentielle triangulaire* genoemd.

In overeenstemming hiermede kunnen we derhalve ook krijgen eene cosinus-potentiale kromme, eene bitangens-potentiale kromme enz. alnaarmate men de potentiale kromme behandelt van de cosinusianen, bitangentianen enz.; terwijl de weg gewezen is ter constructie van een onbegrensd aantal potentiale krommen van den driehoek.

We zullen de vergelijking dezer krommen algemeen bepalen. Zijn  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de trilineaire coördinaten van een concurrentiepunt van zekere goniometrische hoektransversaal van de  $m^{\text{de}}$  orde ten aanzien van  $a$ ,  $b$  en  $c$ , dan is uit § 3 a gemakkelijk te zien, dat

$$\frac{a\alpha}{F^m(A)} = \frac{b\beta}{F^m(B)} = \frac{c\gamma}{F^m(C)} = p, \quad (p \text{ is eene standvastige}).$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \log p + m \log F(A) &= \log(a\alpha), \\ \log p + m \log F(B) &= \log(b\beta), \\ \log p + m \log F(C) &= \log(c\gamma). \end{aligned}$$

Elimineert men hieruit  $p$  en  $m$ , dan is

$$\begin{vmatrix} 1, \log(a\alpha), \log F(A), \\ 1, \log(b\beta), \log F(B), \\ 1, \log(c\gamma), \log F(C), \end{vmatrix} = 0,$$

of

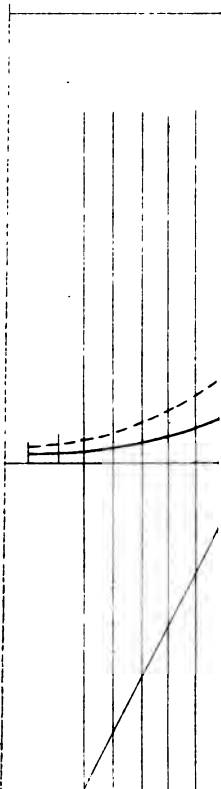
$$(a\alpha)^{\log \frac{F(B)}{F(C)}} \cdot (b\beta)^{\log \frac{F(C)}{F(A)}} \cdot (c\gamma)^{\log \frac{F(A)}{F(B)}} = 1.$$

Deze vergelijking stelt een algemeen typus voor van de driehoekspotentiale krommen. Ze gaan blijkbaar allen door het zwaartepunt ( $a\alpha = b\beta = c\gamma$ ) en door de uitwendige concurrentiepunten van de 0<sup>de</sup> orde van alle stelsels.

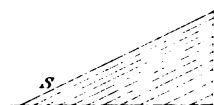
---

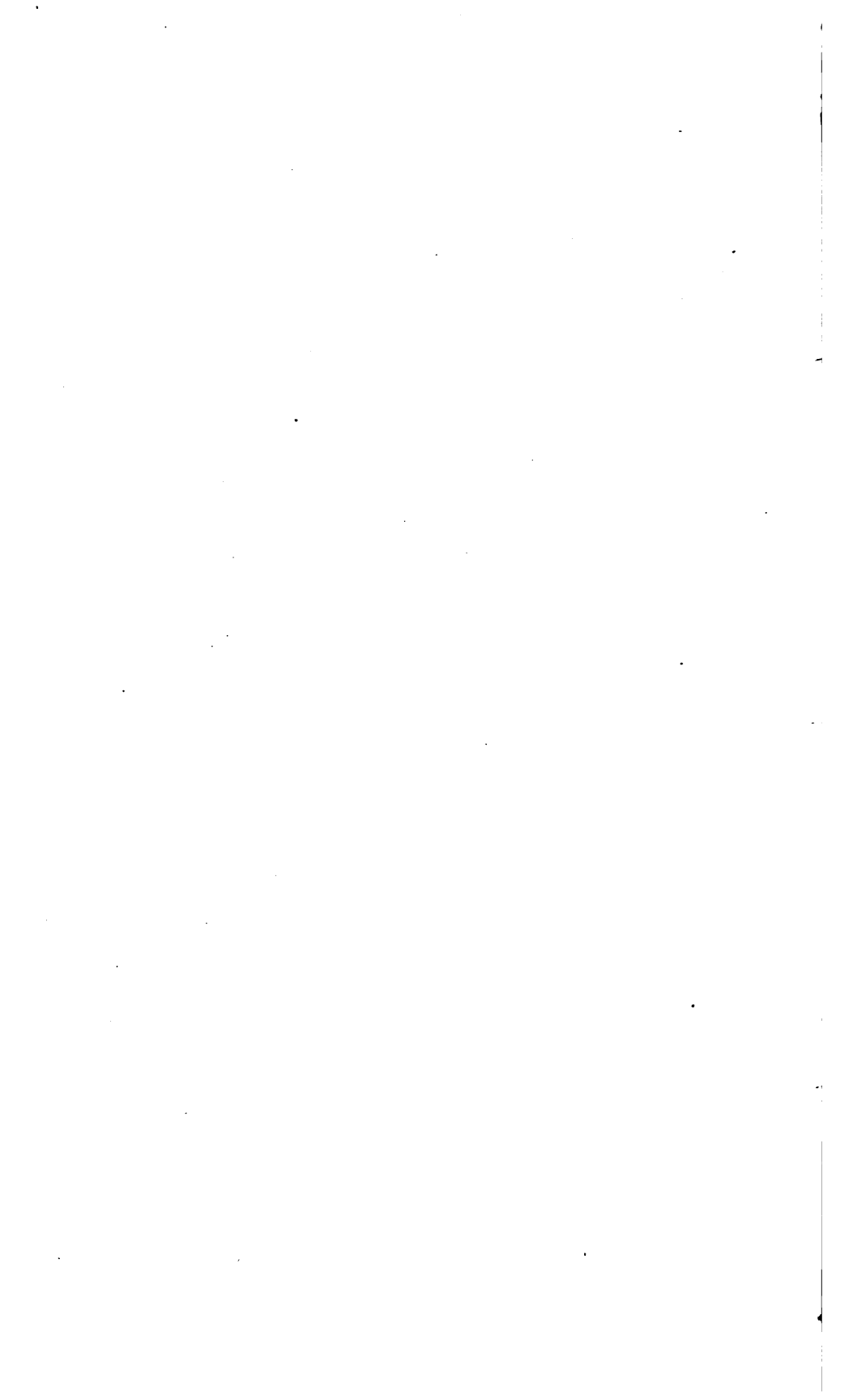






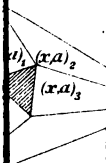
*Fig.1*



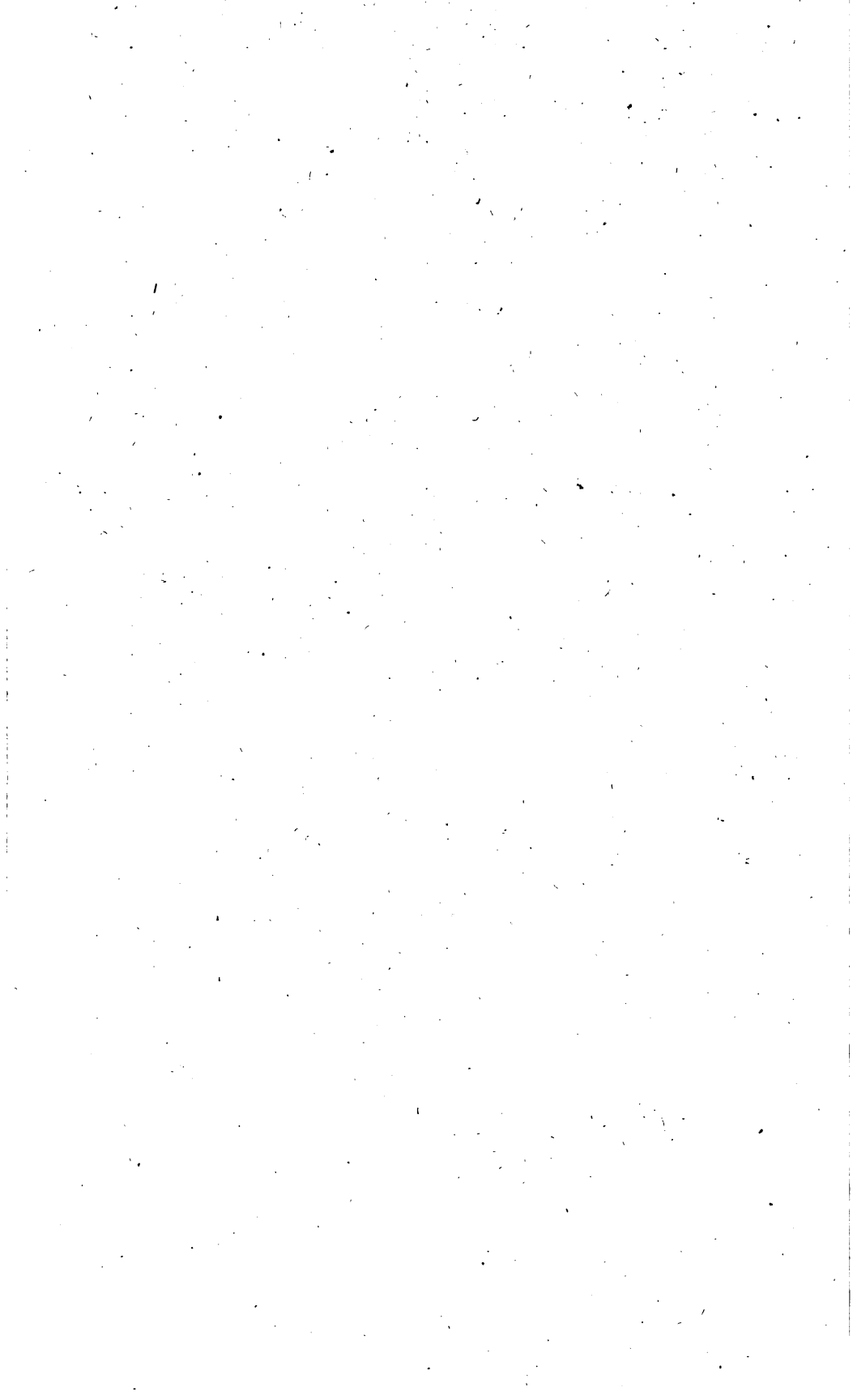


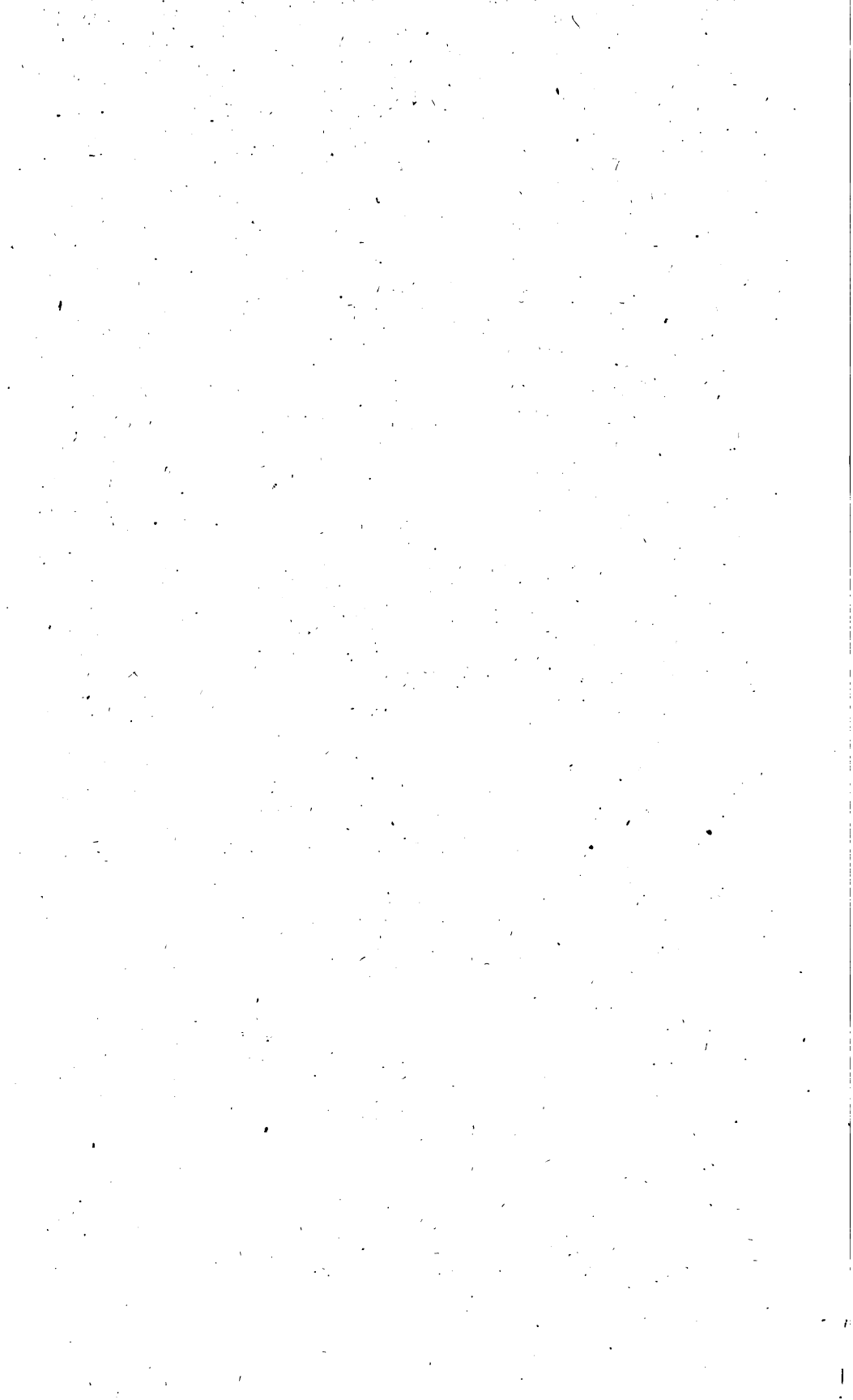
$(A'BC)$

(2)

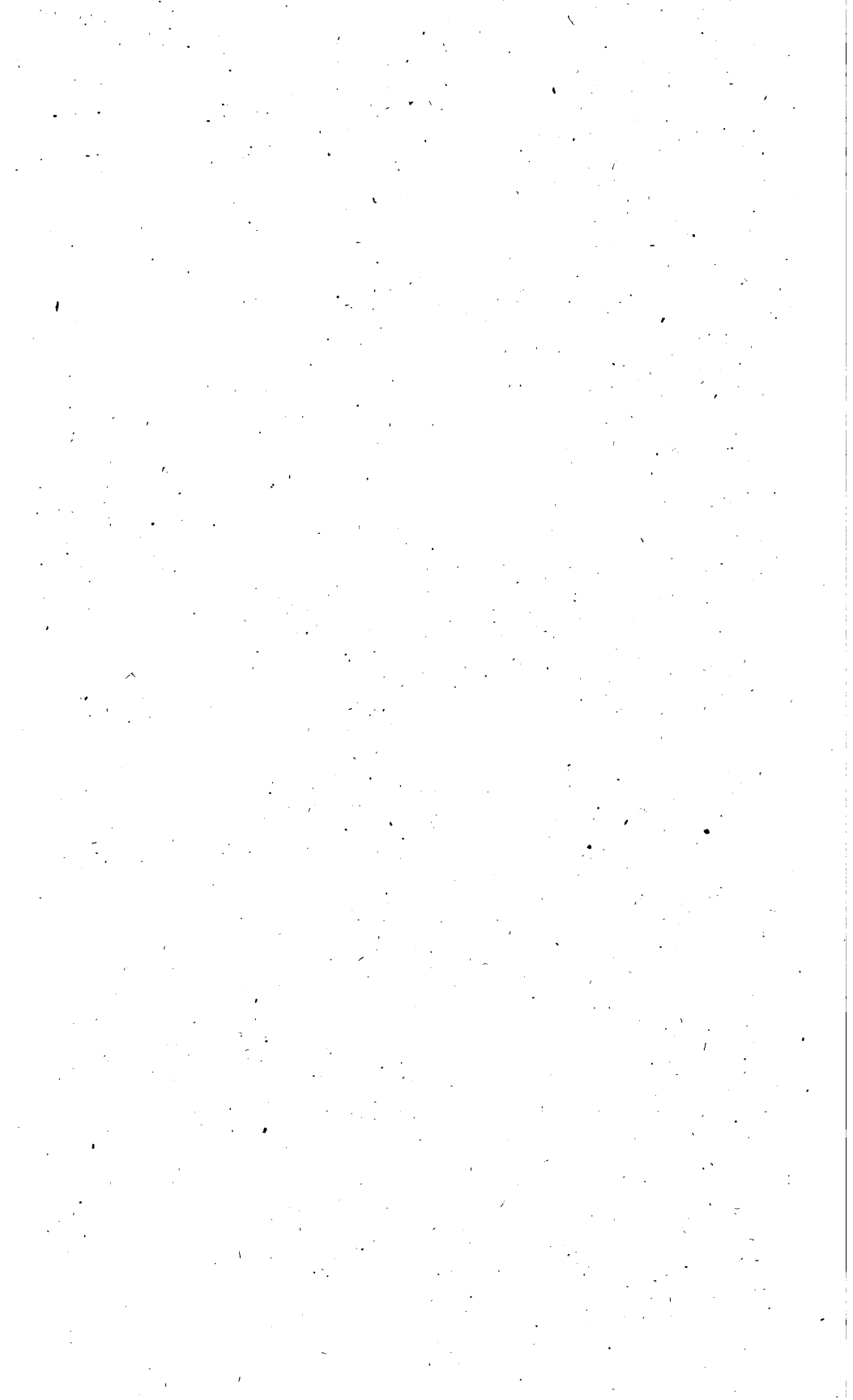








PERIODICAL





PERIODICAL